JORDAN ELLENBERG

# O PODER DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

## A CIÊNCIA DE COMO NÃO ESTAR ERRADO

Best-seller do *New York Times*

Jordan Ellenberg

# O poder do pensamento matemático

A ciência de como não estar errado

Tradução:
George Schlesinger

Revisão técnica:
Samuel Jurkiewicz
*Professor da Politécnica e da Coppe/UFRJ*



*Para Tanya*

"Aquilo que há de melhor na matemática não merece ser a
dido apenas como obrigação; deve ser assimilado como pa
pensamento diário e depois lembrado vezes e vezes seg
com interesse sempre renovado."

BERTRAND RUSSELL, "The study of Mathematics",

# Sumário

# Introdução
# Quando será que eu vou usar isso?

Neste exato momento, numa sala de aula em algum lugar do mundo, uma alun
xingando o professor de matemática. O professor acaba de lhe pedir que passe uma
substancial de seu fim de semana calculando uma lista de trinta integrais definidas.

Há milhares de coisas que a aluna prefere fazer. Na verdade, dificilmente há alguma
que *não* prefira fazer. E ela sabe disso muito bem, porque passou boa parte do fim de se
anterior calculando uma lista diferente – mas não *muito* diferente – de trinta int
definidas. Ela não vê qual o sentido disso, e é o que diz ao professor. Em algum por
conversa, a aluna fará ao professor a pergunta que ele mais teme:

"*Quando será que eu vou usar isso?*"

Agora o professor de matemática provavelmente diz algo do tipo:

"Eu sei que para você parece bobagem, mas, lembre-se, você não sabe que carrei
escolher. Pode ser que você não veja a relevância agora, mas talvez entre numa área e
seja realmente importante saber como calcular integrais definidas à mão, de forma rá
correta."

Poucas vezes essa resposta satisfaz a aluna. Porque é mentira. E o professor e a
sabem que é mentira. O número de adultos que algum dia lança mão de uma integral
$- 3x + 4x^2)^{-2}\,dx$, da fórmula para o cosseno de $3\theta$ ou da divisão sintética de polinômios
ser contado em poucos milhares de mãos.

A mentira tampouco é muito satisfatória para o professor. Eu devo saber disso
muitos anos em que ensinei matemática, pedi a algumas centenas de alunos da facu
que calculassem listas de integrais definidas.

Felizmente existe uma resposta melhor. Ela é mais ou menos assim:

"A matemática não é só uma sequência de cálculos a serem executados por rotina a
sua paciência ou sua energia se esgote – embora possa parecer isso, pelo que lhe ensin
nos cursos de *matemática*. Essas integrais são para a matemática a mesma coisa que tra
com pesos e fazer ginástica para o futebol. Se você quer jogar futebol – quer dizer,
*mesmo*, em nível de competição –, vai ter de fazer um monte de exercícios chatos, repet
e aparentemente sem sentido. Será que os jogadores profissionais algum dia *usam*
exercícios? Bom, você nunca vai ver ninguém em campo levantando halteres nem cor
em zigue-zague entre cones de trânsito. Mas vê os jogadores usando a força, a velocid
percepção e a flexibilidade que desenvolveram fazendo esses exercícios, semana após
na, de forma tediosa. Praticar esses exercícios é parte de aprender futebol.

"Se você quer jogar futebol para ganhar a vida, ou mesmo participar do time do co
vai ter de passar uma porção de fins de semana enfadonhos no campo de treinament
há outro jeito. Mas aqui está a boa notícia. Se os exercícios são demais para você, se

zagueiros ou marcar um gol de longe, exatamente como um atleta profissional. Voc mais saudável e feliz do que se ficasse em casa assistindo aos profissionais na TV.

"Com a matemática acontece mais ou menos a mesma coisa. Pode ser que você não almejando uma carreira com orientação matemática. Tudo bem – a maioria das pesso almeja. Mesmo assim, você ainda pode usar matemática. Provavelmente já *está us* mesmo que não dê a ela esse nome. A matemática está entrelaçada à nossa forr raciocinar. E deixa você melhor em muita coisa. Saber matemática é como usar um p óculos de raios X que revelam estruturas ocultas por sob a superfície caótica e bagu do mundo. Matemática é a ciência de como não estar errado em relação às coisas. técnicas e hábitos foram moldados ao longo de séculos de trabalho árduo e muita argu tação. Com as ferramentas da matemática à mão, você pode entender o mundo de ma mais profunda, consistente e significativa. Tudo de que você necessita é um treinad mesmo um livro, que lhe ensine as regras e algumas táticas básicas. Eu serei seu trei E vou lhe mostrar como."

Por razões de tempo, raramente é isso o que eu digo em aula. Mas num livro há para se estender um pouco mais. Espero justificar a alegação que acabei de fazer most a você que os problemas nos quais pensamos todo dia – problemas de política, med comércio, teologia – são enfrentados com a matemática. Compreender isso lhe dá ac insights não acessíveis por outros meios.

Mesmo que eu fizesse à minha aluna esse discurso motivacional na íntegra, ela poderia – se for realmente afiada – não se convencer.

"Isso soa muito legal, professor", ela dirá. "Mas é uma coisa bem abstrata. Você di com a matemática à sua disposição pode acertar em coisas que faria errado. Mas qu de coisa? Me dê um *exemplo concreto*."

A essa altura eu lhe contaria a história de Abraham Wald e os furos de bala que fal

## Abraham Wald e os furos de bala que faltam

Essa história, como muitas outras da Segunda Guerra Mundial, começa com os na expulsando um judeu da Europa e termina com os nazistas lamentando esse ato. Abr Wald nasceu em 1902,[1] na cidade que então se chamava Klausenburg, que na época parte do Império Austro-Húngaro. Quando Wald era adolescente, a Primeira Guerra dial estava só nos livros, e sua cidade natal havia se tornado Cluj, na Romênia. Ele era de rabino e filho de um padeiro kosher, mas desde sempre o jovem Wald fora um matem Seu talento para a matéria logo foi reconhecido, e ele foi admitido para estudar maten na Universidade de Viena, onde se sentiu atraído por temas abstratos e recônditos até padrões da matemática pura: teoria dos conjuntos e espaços métricos.

Quando Wald completou os estudos, em meados da década de 1930, a Áustria e mergulhada numa profunda crise econômica, e não havia possibilidade de um estrar ser contratado como professor em Viena. Wald foi salvo por uma oferta de empreg por Oskar Morgenstern, que mais tarde emigraria para os Estados Unidos e ajud

Pesquisa Econômica e contratou Wald por um pequeno salário para efetuar tarefas : máticas estranhas. Isso acabou se revelando um bom passo para Wald: sua experiênc economia lhe valeu uma oferta de bolsa na Comissão Cowles, um instituto de ecor então situado em Colorado Springs. Apesar da situação política cada vez pior, Wald re em dar um passo que o afastaria da matemática pura para sempre. Mas então os na conquistaram a Áustria, facilitando substancialmente sua decisão. Após apenas alguns ı no Colorado, foi-lhe oferecida uma cadeira de estatística em Columbia; ele fez as malas uma vez e mudou-se para Nova York.

E foi lá que lutou sua guerra.

O Grupo de Pesquisa Estatística (SRG, de Statistical Research Group),[2] no qual passou grande parte da Segunda Guerra Mundial, era um programa sigiloso que mobi o poderio reunido dos estatísticos americanos para o esforço de guerra – algo semel ao Projeto Manhattan, exceto que as armas desenvolvidas eram equações, e não explo O SRG era efetivamente *em* Manhattan, no número 401 da West 118th Street, em Mor side Heights, apenas a uma quadra da Universidade Columbia. O prédio agora a apartamentos para o corpo docente da universidade e alguns consultórios médicos, m 1943 era o fervilhante e reluzente centro nervoso da matemática de guerra. No Gru Matemática Aplicada de Columbia, dezenas de moças debruçadas sobre calculador mesa Marchant calculavam fórmulas para a curva ideal que um caça deveria traçar n fim de manter o avião inimigo sob a mira de sua metralhadora. Em outro aposento equipe de pesquisadores de Princeton desenvolvia protocolos para bombardeios estraté A ala de Columbia para o projeto da bomba atômica ficava na sala ao lado.

Mas o SRG era o mais poderoso e, em última análise, o mais importante de todos grupos. A atmosfera combinava a abertura e intensidade intelectual de um departar acadêmico ao sentido de determinação que vem apenas com os mais altos desafios. "Qu elaborávamos recomendações",[3] escreveu W. Allen Wallis, o diretor, "muitas vezes ac ciam coisas. Caças entravam em combate com suas metralhadoras carregadas confor advertências de Jack Wolfowitz acerca de misturar tipos de munição, e talvez os p voltassem, talvez não. Aviões da Marinha lançavam foguetes cujos propulsores havian aceitos pelos planos de inspeção de amostragem de Abe Girshick, e talvez os fog explodissem destruindo nossos próprios aviões e pilotos, ou talvez destruíssem o alvo

O talento matemático ali disponível correspondia à gravidade da tarefa. Nas palavı Wallis, o SRG foi "o mais extraordinário grupo de estatísticos já organizado, levand conta tanto a quantidade quanto a qualidade".[4] Frederick Mosteller, que mais tarde fur o Departamento de Estatística de Harvard, estava lá. Como também Leonard Jimmie Sa o pioneiro da teoria da decisão e grande advogado com atuação na área que viria conhecida por estatística bayesiana.[a] Norbert Wiener, matemático do Instituto Tecnol de Massachusetts (MIT, de Massachusetts Institute of Technology) e criador da cibern dava uma passada por ali de tempos em tempos. Este era o grupo no qual Milton Fried futuro Prêmio Nobel de Economia, muitas vezes se tornava a quarta pessoa mais inteli na sala.

A pessoa *mais inteligente* na sala em geral era Abraham Wald. Ele fora professor de

Ainda qualificado como "estrangeiro inimigo", tecnicamente não tinha permissão pa os relatórios sigilosos que produzia. A piada em torno do SRG[5] era de que as secre deviam arrancar uma folha de papel de sua mão logo que ele acabasse de escrevê-la. de certa forma, era um integrante improvável do grupo. Como sempre, inclinava-se p abstração, para longe das aplicações diretas. Mas sua motivação para usar o talento c o Eixo era óbvia. E quando era necessário transformar uma ideia vaga em matemática s Wald era a pessoa que se queria ter ao lado.

ASSIM, EIS A QUESTÃO.[6] Você não quer que seus aviões sejam derrubados pelos caças inin então você os blinda. Mas a blindagem torna o avião mais pesado, e aeronaves mais pe são mais difíceis de manobrar e usam mais combustível. Blindar demais os aviões problema; blindar os aviões de menos é um problema. Em algum ponto intermediá uma situação ideal. O motivo de você ter uma equipe de matemáticos enfurnados aposento na cidade de Nova York é descobrir qual é essa situação ótima.

Os militares foram ao SRG com alguns dados que julgaram úteis. Quando os a americanos voltavam de suas missões na Europa, estavam cobertos de furos de balas os danos não eram distribuídos uniformemente pela aeronave. Havia mais furos na f gem, não tantos nos motores.

| Seção do avião | Balas por pé[b] quadrado Motor |
|---|---|
| Motor | 1,11 |
| Fuselagem | 1,73 |
| Sistema de combustível | 1,55 |
| Resto do avião | 1,8 |

Os oficiais viam aí uma oportunidade de eficiência. Pode-se obter a mesma proteçã menos blindagem se a concentrarmos nos locais mais necessários, onde os aviões sã atingidos. Contudo, exatamente quanto mais de blindagem caberia a essas partes do a Essa era a resposta que foram obter de Wald. Mas não a obtiveram.

A blindagem, disse Wald, não devia ir para onde os furos de bala estão, mas para os furos *não estão*, isto é, nos motores.

A grande sacada de Wald foi simplesmente perguntar: onde estão os furos de bal faltam? Aqueles que estariam sobre todo o revestimento do motor caso os danos tiv se distribuído de forma igual pelo avião? Wald estava bastante seguro a esse respei furos de balas que faltavam estavam nos aviões que faltavam. A razão de os aviões vol com menos pontos atingidos no motor era que os atingidos no motor não voltava grande quantidade de aviões que retornava à base com a fuselagem semelhante a um suíço era forte evidência de que os tiros sofridos pela fuselagem podem (e portanto d ser tolerados. Se você for à sala de recuperação num hospital, verá muito mais gent furos de bala nas pernas que no peito. Mas isso não ocorre porque as pessoas nã atingidas no peito, e sim porque as pessoas atingidas no peito não se recuperam.

Eis aqui um velho truque matemático que torna o quadro completamente claro: *esta algumas variáveis como zero*. Nesse caso, a variável a pinçar é a probabilidade de um

zero significa que um único tiro no motor sem dúvida derruba o avião. Qual deveria aparência dos dados nesse caso? Você teria aviões com furos de bala ao longo das as fuselagem, do nariz, mas nenhum no motor. O analista militar tem duas opções para ex isso: ou as balas alemãs atingem qualquer parte do avião, menos o motor, ou o mot ponto de vulnerabilidade total. Ambas as situações explicam os dados, mas esta últin mais sentido. A blindagem vai para onde não estão os furos.

As recomendações de Wald foram rapidamente materializadas, e ainda eram empre pela Marinha e pela Força Aérea na Guerra da Coreia e do Vietnã.[7] Não sei dizer exata quantos aviões americanos elas salvaram, embora os analistas de dados descendent SRG e que hoje são militares devam fazer uma boa ideia a respeito. Uma coisa establishment de defesa americano tem tradicionalmente compreendido muito bem os países não vencem guerras somente sendo mais corajosos que o outro lado, nem livres, nem um pouco preferidos por Deus. Os vencedores em geral são os caras que tê a menos de aviões derrubados, ou que utilizam 5% menos combustível, ou que nutre infantaria 5% a mais com 95% do custo. Esse não é o tipo de coisa que figure nos film guerra, mas que constitui a própria guerra. E há matemática em cada passo do camin

Por que Wald viu o que os oficiais, que tinham um conhecimento e uma compre muito mais vastos dos combates aéreos, não conseguiram ver? Tudo volta para o hábitos matemáticos de pensamento. Um matemático sempre pergunta: "Quais sã premissas? Elas se justificam?" Isso pode ser muito irritante, mas também bem prod Nesse caso, os oficiais tinham uma premissa involuntária, de que os aviões que vol eram uma amostra aleatória de todos os aviões. Se isso fosse verdade, você poderi conclusões sobre a distribuição dos furos de bala em todos os aviões examinando a buição dos furos apenas nos aviões sobreviventes. Uma vez reconhecendo que a hipó esta, basta um instante para perceber que ela está totalmente errada; não há motiv esperar que os aviões apresentem uma probabilidade igual de sobrevivência, indepen mente de onde são atingidos. Num fragmento de jargão matemático ao qual voltarem Capítulo 15, a taxa de sobrevivência e a localização dos furos de balas estão *correlacio*

A outra vantagem de Wald era sua tendência para a abstração. Wolfowitz, que est com Wald em Columbia, escreveu que os problemas favoritos de seu colega eram "d mais abstrato possível",[8] e que ele "sempre estava pronto para falar sobre matemática não se interessava pela popularização nem pelas aplicações específicas".

A personalidade de Wald dificultava que ele focalizasse sua atenção em prob aplicados, é verdade. A seu ver, os detalhes de aviões e metralhadoras eram puro enchi – ele mirava direto por entre escoras e pregos que sustentavam a história. Às veze abordagem pode levar você a ignorar características do problema que têm importânci também permite que você veja o esqueleto comum compartilhado por questões que pa muito diferentes na superfície. Assim você tem uma experiência significativa em áre quais parece não ter vivência alguma.

Para um matemático, a estrutura subjacente ao problema do furo de bala é um fenô chamado *viés de sobrevivência*, que sempre ressurge em todos os tipos de contexto. Un que tenha familiaridade com ele, como Wald, você facilmente o percebe, onde quer q se esconda.

É como os fundos mútuos. A avaliação da performance dos fundos mútuos é uma em que ninguém quer estar errado, nem um pouquinho só. Uma variação de 1 crescimento anual pode ser a diferença entre um ativo financeiro valioso e aquela rou Os fundos na categoria Large Blend da Morningstar, investidos em grandes empresa representam aproximadamente o S&P 500,[c] parecem pertencer ao primeiro tipo. Os fu nessa classe cresceram em média 178,4% entre 1995 e 2004, saudáveis 10,8% ao ano.[d] F que você se sairia bem, se tivesse dinheiro, investindo nesses fundos, não?

Bem, não. Um estudo de 2006, feito pela Savant Capital,[9] lançou luz um tanto ma sobre esses números. Pense outra vez em como a Morningstar gera seus cálculos. Est em 2004, você pega todos os fundos classificados como Large Blend e vê quanto cresc nos últimos dez anos.

Mas falta alguma coisa: *os fundos que não estão ali*. Fundos mútuos não vivem sempre. Alguns florescem, outros morrem. Os que morrem, de forma geral, são aquele não dão dinheiro. Logo, julgar o desempenho de uma década de fundos mútuos a daqueles que ainda existem no fim dos dez anos é como julgar as manobras evasiva nossos pilotos contando os furos de bala nos aviões que retornam. O que significari encontrar nunca mais de um furo de bala por avião? Não que os nossos pilotos brilhantes em se esquivar do inimigo, mas que os aviões que foram atingidos duas despencaram em chamas.

O estudo da Savant descobriu que, se fosse incluída a performance dos fundos m junto com a dos sobreviventes, a taxa de retorno cairia para 134,5%, num valor muito normal de 8,9% ao ano. Pesquisa mais recente respaldou essa conclusão. Um estudo a gente realizado em 2011 e publicado na *Review of Finance*,[10] cobrindo quase 5 mil fu descobriu que a taxa de retorno excedente dos 2.641 sobreviventes é cerca de 20% ma que a mesma cifra recalculada de modo a incluir os fundos que não deram certo. O tam do efeito de sobrevivência pode ter surpreendido os investidores, mas provavelment surpreenderia Abraham Wald.

## Matemática é a extensão do senso comum por outros meios

A essa altura minha interlocutora adolescente vai me interromper e perguntar, r razoavelmente: "Onde está a matemática?" Wald era matemático, é verdade, e não se negar que sua solução para o problema dos furos de bala foi engenhosa. Mas o que matemático nela? Não havia nenhuma identidade trigonométrica a ser observada, integral, nem inequação, nenhuma fórmula.

Em primeiro lugar, Wald usou fórmulas, sim. Eu contei a história sem elas porque apenas a introdução. Quando se escreve um livro explicando a reprodução humana

hidráulica de como os bebês entram na barriga da mamãe. Em vez disso, você começa algo como: "Tudo na natureza muda; as árvores perdem as folhas no inverno só para de novo na primavera; a humilde lagarta entra na sua crisálida e emerge como mag borboleta. Você também é parte da natureza, e..."

É nessa parte do livro que estamos agora.

Mas aqui somos todos adultos. Desligando momentaneamente a abordagem suav uma página de amostra do aspecto real do relatório de Wald:[11]

$$\lambda_1 q_i \le q_{i+1} \le \lambda_2 q_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{a_j}{j(j-1)}}{\lambda_1^{\;2}} < 1 - a_0 \qquad \textbf{(A)}$$

$$0{,}07 + \frac{0{,}04}{0{,}8} + \frac{0{,}01}{(0{,}8)^3} + \frac{0{,}005}{(0{,}8)^6} + \frac{0{,}005}{(0{,}8)^{10}} = 0{,}20529,$$

Espero que não tenha sido chocante demais.

Ainda assim, a ideia *real* por trás do insight de Wald não requer nada desse formal Nós já a explicamos sem usar notação matemática de nenhum tipo. Então a pergur minha aluna continua a valer: "O que faz essa matemática? Ela não é só senso comum

Sim. Matemática é senso comum. Em algum nível básico, isso é claro. Como se explicar a alguém por que somar sete coisas com cinco coisas dá o mesmo resultad somar cinco coisas com sete? Não se pode. O fato está embutido na nossa forma de p acerca de juntar coisas. Os matemáticos gostam de dar nomes aos fenômenos que o senso comum descreve. Em vez de dizer "*Esta* coisa somada com *aquela* coisa é a *n* coisa que *aquela* coisa somada com *esta* coisa", nós falamos: "A adição é comutativa como gostamos de símbolos, escrevemos:

Para qualquer escolha de $a$ e $b$, $a + b = b + a$.

Apesar da fórmula de aspecto oficial, estamos falando de um fato compreei instintivamente por qualquer criança.

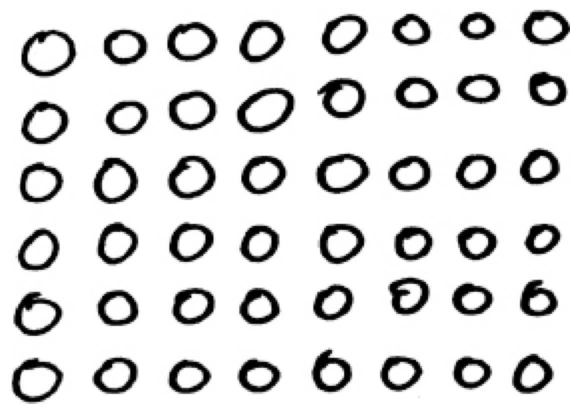
Multiplicação é um caso ligeiramente diferente. A fórmula parece bem similar:

Para qualquer escolha de $a$ e $b$, $a \times b = b \times a$.

A mente, diante dessa afirmação, não diz "Está na cara" com a mesma rapidez q caso da adição. É "senso comum" que dois conjuntos de seis coisas correspondam à m quantidade que seis conjuntos de duas?

Talvez não. Mas pode *se tornar* senso comum. Eis minha mais antiga memói matemática. Estou deitado no chão da casa dos meus pais, a bochecha pressionada co tapete felpudo, olhando para o aparelho estéreo. Provavelmente estou escutando o l do *Álbum azul* dos Beatles. Devo ter uns seis anos. Foi na década de 1970, e o apa estéreo deve estar embutido num painel de madeira compensada, com um arranjo retar de furos para entrada de ar num dos lados. Oito furos na horizontal, seis na vertical. E estou ali deitado, olhando os furos. As seis fileiras de furos. As oito colunas de furos. Fa meu olhar entrar e sair de foco, eu conseguia fazer minha mente oscilar entre ver as fi e ver as colunas. Seis fileiras com oito furos cada. Oito colunas com seis furos cada.

E aí eu saquei. Oito grupos de seis eram a mesma coisa que seis grupos de oito porque fosse uma regra que me tivessem dito, mas porque não podia ser de outro je número de furos no painel era o número de furos no painel, não importava a maneira eram contados.



O APARELHO ESTÉREO DE MEUS PAIS, 1977

Temos uma tendência de ensinar matemática como uma longa lista de regras. Vc aprende numa ordem e deve obedecê-las, caso contrário tira nota baixa. *Isso* *matemática*. Matemática é o estudo de coisas que aparecem de certo modo porqu poderiam ser de modo diferente.

Agora, sejamos justos. Nem tudo na matemática pode ser perfeitamente transpa para a nossa intuição como a adição e a multiplicação. Você não pode fazer cálculo in e diferencial por senso comum. Mas ainda assim o cálculo *derivou* do nosso senso co – Newton pegou nossa intuição física sobre objetos que se movem em linha reta, formal a e aí construiu sobre essa estrutura formal uma descrição matemática universal do mento. Uma vez tendo a teoria de Newton à mão, você pode aplicá-la a problema fariam sua cabeça girar se não tivesse equações para ajudá-lo. Da mesma maneira, sistemas mentais embutidos para avaliar a probabilidade de um resultado incerto. Mas sistemas são bastante fracos e pouco confiáveis, especialmente quando se trata de ev de extrema raridade. É aí que respaldamos nossa intuição com alguns teoremas e téc robustos e adequados, e fazemos deles uma teoria matemática da probabilidade.

A linguagem especializada na qual os matemáticos conversam entre si é uma ferran magnífica para transmitir ideias complexas de forma ágil e precisa. Mas sua estranheza criar entre os não matemáticos a impressão de uma esfera de pensamento totalmente ao raciocínio habitual. Isso está absolutamente errado.

A matemática é como uma prótese alimentada por energia atômica que você pren seu senso comum, multiplicando vastamente seu alcance e sua potência. Apesar do da matemática, e apesar de sua notação e abstração às vezes proibitivas, o efetivo tra mental envolvido é pouco diferente da maneira como pensamos sobre problemas m no chão. Eu acho útil ter em mente uma imagem do Homem de Ferro abrindo um b a socos através de uma parede de tijolos. De um lado, a efetiva força que quebra a p não é fornecida pelos músculos de Tony Stark, mas por uma série de servomecan finamente sincronizados e alimentados por um compacto gerador de partículas bet outro lado, do ponto de vista de Tony Stark, o que ele está fazendo é socar uma pa exatamente como faria sem a armadura. Só que muito, muito mais forte.

Sem a estrutura rigorosa que a matemática provê, o senso comum pode levar voc perder. Foi isso que aconteceu com os oficiais que queriam blindar as partes dos avi suficientemente fortes. Mas a matemática formal sem senso comum – sem a constante relação de raciocínio abstrato e nossa intuição sobre quantidade, tempo, espaço, movin comportamento e incerteza – seria apenas um exercício estéril de contabilidade e obedi a regras. Em outras palavras, a matemática seria realmente o que a impertinente alu cálculo acha.

Aí está o verdadeiro perigo. John von Neumann, no ensaio de 1947 chamado Mathematician", advertiu:

> À medida que uma disciplina matemática viaja para longe de sua fonte empírica, ou ainda mais, se é uma segu terceira geração inspirada apenas indiretamente por ideias vindas da "realidade", ela é assediada por graves ] Torna-se cada vez mais uma pura estetização, cada vez mais simplesmente *l'art pour l'art*. Isso não é necessari ruim, se o campo está cercado de temas correlatos, que ainda têm conexões empíricas mais próximas, ou se a di: está sob a influência de homens com um gosto excepcionalmente bem desenvolvido. Mas existe um grave pe que esse assunto se desenvolva segundo a linha de menor resistência, de que a corrente, longe de sua fonte, se numa grande variedade de ramos insignificantes, e que a disciplina se torne uma massa desorganizada de de complexidades. Em outras palavras, a uma distância grande de sua fonte empírica, ou após muita endogamia a a disciplina matemática corre o risco de degeneração.[e]

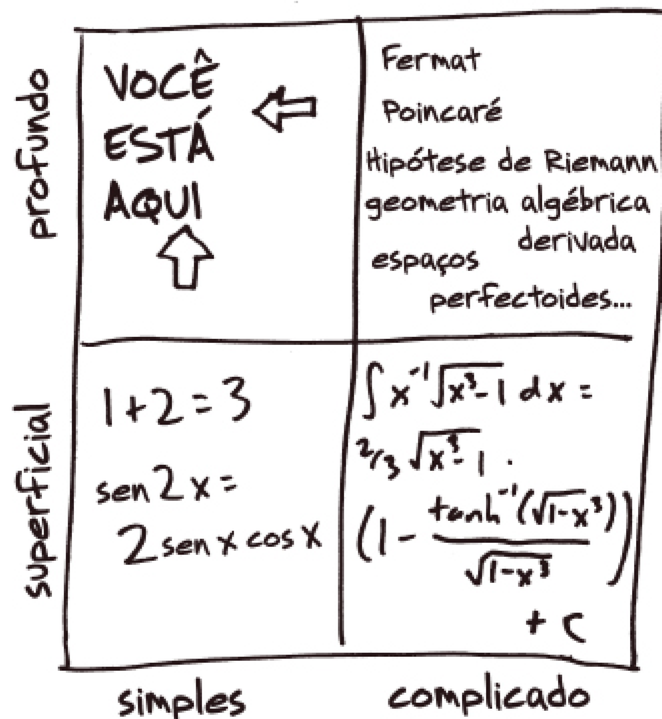
## Qual o tipo de matemática deste livro?

Se seu conhecimento de matemática vem inteiramente da escola, contaram-lhe uma hi muito limitada e, sob alguns aspectos importantes, falsa. A matemática escolar é largar composta por uma sequência de fatos e regras, fatos que são certos, regras que vêm de autoridade mais alta e não podem ser questionadas. Ela trata questões matemáticas assunto completamente encerrado.

A matemática não está encerrada. Mesmo com referência a objetos básicos de es como números e figuras geométricas, nossa ignorância é muito maior que nosso cor mento. E as coisas que sabemos só foram alcançadas após maciço esforço, disputa e con Todo esse suor e tumulto é cuidadosamente excluído do seu livro-texto.

Há fatos e fatos, claro. Nunca houve muita controvérsia sobre 1 + 2 = 3. A questão *e como podemos realmente provar* que 1 + 2 = 3, que oscila desconfortavelmente er matemática e a filosofia, é outra história – vamos voltar a isso no fim do livro. Mas cálculo está correto, isso é pura verdade. A confusão está em outra parte. Diversas vamos chegar muito perto dela.

Fatos matemáticos podem ser simples ou complicados, superficiais ou profundos divide o universo matemático em quatro quadrantes:




Fatos aritméticos básicos, como 1 + 2 = 3, são simples e superficiais. O mesmo c com identidades básicas como sen(2$x$) = 2 sen$x$ cos$x$ ou a fórmula quadrática: pode ligeiramente mais difíceis de convencer você que 1 + 2 = 3, mas no final não têm muitc carga conceitual.

Passando para o quadrante complicado/superficial, você tem o problema de multi números de dez dígitos, ou o cálculo de uma intrincada integral definida, ou, dados a anos no curso de graduação, o traço de Frobenius em forma modular de condutor 2: concebível que por algum motivo você precise saber a resposta desse problema, e é ine que seria algo entre irritante e impossível resolvê-lo à mão; ou, como é o caso da f modular, pode ser necessária alguma instrução séria até para entender o que se pede saber essas respostas na realidade não enriquece seu conhecimento a respeito do mur

O quadrante complicado/profundo é onde matemáticos profissionais como eu gc de passar a maior parte do tempo. É onde vivem teoremas e conjecturas célebres: a hip de Riemann, o último teorema de Fermat,[f] a conjectura de Poincaré, P/NP, o teorer Gödel. Cada um desses teoremas envolveu ideias de profundo significado, import fundamental, beleza estonteante e tecnicidade brutal, e cada um deles é protagonis alguns livros.[12]

Mas não deste livro aqui, que vai se ater ao quadrante superior esquerdo: simj profundo. As ideias matemáticas que queremos abordar são aquelas que podem ser er tadas de forma direta e proveitosa, quer seu treinamento de matemática pare em pré-álg quer vá muito além disso. E não são meros "fatos", como uma simples afirmação aritn – são princípios, cujas aplicações se estendem para além das coisas em que vocé acostumado a pensar como matemática. São ferramentas práticas no cinto de utilic Usadas da forma adequada, ajudarão você a não estar errado.

A matemática pura pode ser uma espécie de convento, um lugar tranquilo, a salv

física, na genômica ou na arte negra da administração dos fundos de pensão, mas e queria essas vivências agitadas.[g] Como aluno de pós-graduação, dediquei-me à teori números, que Gauss chamou de "a rainha da matemática", o mais puro dos temas, o ja central do convento, onde contemplamos as mesmas questões sobre números e equ que preocupavam os gregos e que mal se tornaram menos incômodos nos 25 séculos c passaram desde então.

De início trabalhei com teoria dos números com sabor clássico, provando fatos acer somas de quartas potências de números inteiros que poderia, se pressionado, explicar a minha família no Dia de Ação de Graças, mesmo que não conseguisse justificar provei o que provara. Mas não demorou muito para eu ser seduzido por campos ainda abstratos, investigando problemas em que era impossível mencionar os atores bási "representações de Galois residualmente modulares", "cohomologia de esquemas de n los", "sistemas dinâmicos em espaços homogêneos", coisas desse tipo – fora do arquip dos anfiteatros de seminários e salas de professores que se estendem de Oxford a Princ de Kyoto a Paris e a Madison, Wisconsin, onde sou professor agora. Quando digo qu matéria é empolgante, significativa e linda, e que nunca vou me cansar de pensar n bom você acreditar em mim, porque se faz necessária uma longa formação apenas alcançar o ponto em que os objetos de estudo entram no seu campo de visão.

Mas aconteceu uma coisa engraçada. Quanto mais abstrata e distante da experiênci foi ficando minha pesquisa, mais comecei a notar quanto a matemática estava preser mundo fora das minhas quatro paredes. Não as representações de Galois nem a co-h logia, mas ideias que eram mais simples, mais antigas e igualmente profundas – o quad noroeste do quadro conceitual. Comecei a escrever artigos para revistas e jornais como o mundo era visto pelas lentes matemáticas e descobri, para minha surpresa, q gente que dizia detestar matemática estava disposta a lê-los. Era uma espécie de ensi matemática, mas muito diferente do que fazemos em sala de aula.

O que esse ensino tem em comum com a sala de aula é que o leitor é solicitado a algum trabalho. Voltando a Von Neumann, em "The Mathematician":

> É mais difícil compreender o mecanismo de um avião e as teorias das forças que o erguem e propulsiona simplesmente voar, ser erguido no ar e transportado por ele – ou até mesmo dirigi-lo. É excepcional que s adquirir essa compreensão de um processo sem antes ter profunda familiaridade sobre como dirigi-lo e usá- antes tê-lo assimilado de forma instintiva e empírica.

Em outras palavras, é bastante difícil *compreender* matemática sem *fazer* um pou matemática. Não há uma estrada régia para a geometria, como disse Euclides a Ptolo ou talvez, dependendo da fonte, como Menecmo disse a Alexandre Magno. (Vamos er o fato, velhas máximas atribuídas a cientistas antigos provavelmente são inventadas nem por isso são menos instrutivas.)

Este não será o tipo de livro em que faço gestos vagos e grandiosos para gr monumentos da matemática, instruindo você sobre a forma apropriada de admirá grande distância. Estamos aqui para sujar um pouquinho as mãos. Vamos fazer a cálculos. Haverá algumas fórmulas e equações, quando eu sentir necessidade delas explicar alguma coisa. Não se exigirá nenhuma matemática formal além da aritm

Desenharei alguns gráficos e diagramas grosseiros. Vamos encontrar alguns tópic matemática escolar fora de seu hábitat usual. Veremos como as funções trigonomé descrevem quanto duas variáveis estão relacionadas entre si, o que o cálculo tem a sobre a relação entre fenômenos lineares e não lineares e como a fórmula quadrática de modelo cognitivo para a pesquisa científica.

E também vamos deparar com parte da matemática em geral empurrada para o pe da faculdade, como a crise na teoria dos conjuntos, que aqui aparece como uma espé metáfora para a jurisprudência da Suprema Corte e a arbitragem em jogos de bei desenvolvimentos recentes na teoria analítica dos números, que demonstram a inter-re entre estrutura e aleatoriedade; e teoria da informação e projetos combinatórios, que aj a explicar como um grupo de estudantes de graduação do MIT ganhou milhões de d compreendendo as entranhas da Loteria Estadual de Massachusetts.

Haverá ocasionalmente fofocas sobre matemáticos famosos e certa quantida especulação filosófica. Haverá até uma ou duas provas. Mas nada de dever de casa testes de avaliação.

---

[a] Savage era quase totalmente cego, capaz de ver apenas pelo canto de um dos olhos, e em certa época passou sei vivendo apenas de *pemmican* (mistura concentrada de proteína e gordura de alto valor nutritivo) para compro assunto acerca da exploração do Ártico. Achei que valia a pena mencionar isso.

[b] Um pé corresponde mais ou menos a 30,50cm. (N.T.)

[c] O S&P 500 é um índice financeiro que, grosso modo, representa as quinhentas ações mais importantes no m (N.T.)

[d] Para ser justo, o próprio índice S&P 500 teve resultado ainda melhor, crescendo 212,5% no mesmo período.

[e] A visão de Von Neumann sobre a natureza da matemática é sólida, mas é justo sentir um pouco de náusea a res sua caracterização da matemática executada com fins puramente estéticos como "degenerada". Von Neumann apenas dez anos depois da exposição de *entartene Kunst* ("arte degenerada") na Berlim de Hitler, cujo tema era *pour l'art* era o tipo de coisa de que judeus e comunistas gostavam, e destinava-se a erodir a saudável arte " requerida por um vigoroso Estado teutônico. Sob tais circunstâncias, é possível sentir-se um pouco defensivo em à matemática que não serve a nenhum propósito aparente. Um autor com compromisso político diferente apontaria, a essa altura, o enérgico trabalho de Von Neumann no desenvolvimento e execução de armas nucleares

[f] Que, entre os profissionais, agora é chamado de teorema de Wiles, pois Andrew Wiles o provou (com assistênci de Richard Taylor) e Fermat, não. Mas é provável que o nome tradicional jamais seja trocado

[g] Para ser sincero, quando eu estava na casa dos vinte anos, passei parte da minha vida pensando que talvez quis um "sério romancista". Cheguei mesmo a terminar um "sério romance literário", chamado *The Grasshopper King*, publicado. No entanto, durante o processo, descobri que cada dia que eu dedicava a escrever um "sério romance li correspondia a meio dia me lastimando, com desejo de estar resolvendo problemas matemáticos.

PARTE I

# Linearidade

Inclui: a curva de Laffer; o cálculo explicado em uma página; a lei d
grandes números; diversas analogias com o terrorismo; “Todo mun
nos Estados Unidos terá excesso de peso em 2048”; por que em Dal
do Sul há mais câncer encefálico que em Dakota do Norte; os fantas
das grandezas mortas; o hábito de definição.

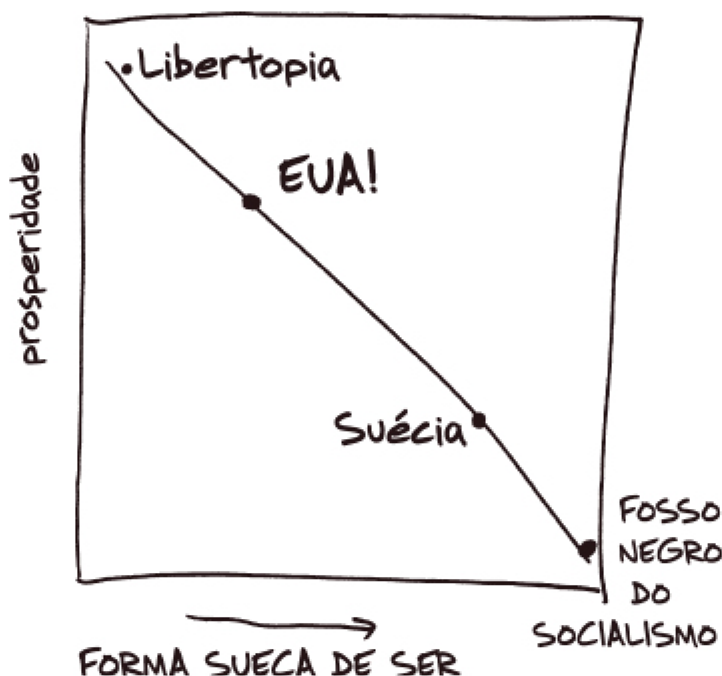
# 1. Menos parecido com a Suécia

ALGUNS ANOS ATRÁS, no calor da batalha sobre o Affordable Care Act,[a] Daniel J. Mitche
libertário Instituto Cato, postou uma entrada num blog com o provocativo título:[1] "Pc
Obama está tentando tornar os Estados Unidos mais parecidos com a Suécia quan
suecos tentam ser menos parecidos com a Suécia?"

Boa pergunta! Formulada assim, ela parece bastante perversa. Por que, senhor presic
estamos nadando contra a correnteza da história, enquanto Estados com política de
estar social ao redor do mundo – mesmo a pequena e rica Suécia! – cortam benefícios
e impostos altos? "Se os suecos aprenderam com seus erros e agora estão tentando re
o tamanho e o alcance do governo", escreve Mitchell, "por que os políticos americanos
determinados a repetir esses erros?"

Responder a essa pergunta exige um gráfico extremamente científico. Eis o aspec
mundo para o Instituto Cato:

O eixo *x* representa o jeito sueco de ser[b] e o eixo *y* é alguma medida de prosperi
Não se preocupe em saber como estamos quantificando essas coisas. A questão é justar
essa: de acordo com o gráfico, quanto mais sueco você é, pior de vida está seu pa
suecos, que não são nada bobos, descobriram isso e estão empreendendo sua escalada
ao noroeste, em direção à prosperidade do mercado livre. Mas Obama escorrega no se
errado.



Deixe-me agora desenhar o mesmo perfil do ponto de vista das pessoas cuja econômica está mais próxima da do presidente Obama que da do pessoal do Instituto




Esse perfil nos dá uma sugestão muito diferente de quão suecos deveríamos ser. achamos a prosperidade máxima? Num ponto mais sueco que os Estados Unidos, p menos sueco que a Suécia. Se essa figura está correta, faz perfeito sentido que O fortaleça nossa política de bem-estar social enquanto os suecos reduzem a deles.

A diferença entre as duas figuras é a distinção entre linearidade e não linearidade das mais centrais na matemática. A curva Cato é uma reta.[c] A curva não Cato, aquela a corcova no meio, não. Uma reta é um tipo de curva, mas não o único tipo, e as desfrutam toda qualidade de propriedades especiais de que as curvas em geral não p desfrutar. O ponto mais alto num segmento de reta – a prosperidade máxima, nesse exe – precisa estar numa extremidade ou na outra. É assim que são as retas. Se baixar os imp é bom para a prosperidade, então baixar ainda mais os impostos é melhor. Se a Suécia se "dessuecizar", devemos fazer o mesmo. Claro que um pensamento anti-Cato ra poderia afirmar que a inclinação da reta é no sentido oposto, indo de sudoeste para nor Se a reta tiver esse aspecto, então, nenhuma quantidade de gastos sociais é exagera política ideal é a Suécia máxima.

Geralmente, quando alguém se proclama "pensador não linear", é porque está pre se desculpar por ter perdido algo que você lhe emprestou. Mas a não linearidade é coisa real! Nesse contexto, pensar não linearmente é crucial porque nem todas as curva retas.[d] Um momento de reflexão lhe dirá que as curvas reais da economia têm a apar da segunda figura, não da primeira. Elas são não lineares. O raciocínio de Mitchell exemplo de *falsa linearidade* – ele está assumindo, sem dizer claramente, que o cur prosperidade é descrito pelo segmento de reta na primeira figura, em cujo caso o fato Suécia se despir da sua infraestrutura social significa que devemos fazer o mesmo.

Mas enquanto você acredita que existe algo como bem-estar social demais e algo

princípio mais complicado do que "Mais governo é ruim, menos governo é bom". Os gen que consultaram Abraham Wald depararam com o mesmo tipo de situação: blindage menos significava que os aviões seriam abatidos, blindagem demais significava qu conseguiriam voar. Não é uma questão de ser bom ou ruim adicionar mais blindag podia ser qualquer uma das duas, dependendo do peso da blindagem dos aviões, começar. Se há uma resposta ideal, ela está em algum ponto no meio, e o desvio em qua uma das direções é péssima notícia.

Pensamento não linear significa que *a direção em que você deve ir depende de ond já está*.

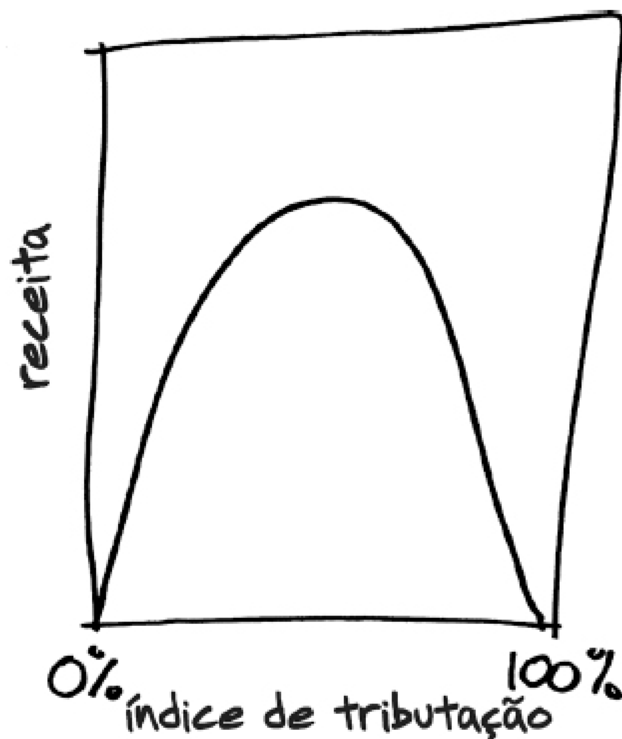
Essa sacação não é nova. Já em tempos romanos encontramos o famoso comentá Horácio: "*Est modus in rebus, sunt certi denique fines, quos ultra citraque nequit cons rectum*"[2] ("Há uma medida apropriada nas coisas. Existem, afinal, certos limites aqu além dos quais aquilo que é certo não pode existir"). E ainda mais para trás, na *É Nicômaco*, Aristóteles observa que comer demais ou de menos é problemático p constituição. O ideal está em algum ponto intermediário, pois a relação entre comer e não é linear, mas curva, com resultados ruins em ambas as extremidades.

## Economia vodu

A ironia é que os conservadores, em economia, como o pessoal do Cato, costum entender isso melhor que ninguém. Aquele segundo perfil que desenhei ali? O extremar científico, com a corcova no meio? Não sou a primeira pessoa a desenhá-lo. Ele se c *curva de Laffer* e desempenhou papel importante na economia republicana por quarenta anos. Na metade da administração Reagan, a curva havia se tornado tam lugar-comum no discurso econômico que Ben Stein sentiu-se à vontade para introd em sua impagável aula em *Curtindo a vida adoidado*:

> Alguém sabe o que é isso? Turma? Alguém?... Alguém? Alguém já viu isso antes? A curva de Laffer. Alguém que ela diz? Diz que neste ponto sobre a curva da receita você obterá exatamente a mesma receita que neste por é muito controverso. Alguém sabe como o vice-presidente Bush chamou isso em 1980? Alguém? Economia "vo

A lenda da curva de Laffer é mais ou menos assim: Arthur Laffer, então profess economia na Universidade de Chicago, jantou certa noite de 1974 com Dick Cheney, D Rumsfeld e o editor do *Wall Street Journal*, Jude Wanniski, no restaurante de um ho luxo em Washington, DC. Estavam discutindo sobre o plano tributário do presidente e, como sempre acontece entre intelectuais quando o debate esquenta, Laffer pedi guardanapo[e] e desenhou uma figura. A figura era assim:




O eixo horizontal aqui é o nível de tributação, e o eixo vertical representa o val receita que o governo arrecada dos contribuintes. Na borda esquerda do gráfico, o índ tributação é 0%; nesse caso, por definição, o governo não obtém receita tributária. À d o índice de tributação é 100%; qualquer que seja a sua renda, seja de um negócio que dirige ou de um salário que lhe é pago, ela vai direto para o bolso do Tio Sam.

Que está vazio. Se o governo usa o aspirador de pó para sugar cada centavo do s que você recebe para aparecer na escola e lecionar, ou vender equipamentos, ou gere alguma atividade, por que se preocupar em fazê-lo? Na extremidade direita do gráf pessoas simplesmente não trabalham. Ou, se trabalham, o fazem em nichos de ecor informal onde os coletores de impostos não conseguem pôr as mãos. A receita do go volta a ser zero.

Na faixa intermediária no meio da curva, onde o governo nos cobra algo entre na nossa renda e toda ela – em outras palavras, no mundo real –, o governo consegue al receita.[3]

Isso significa que a curva que registra a relação entre índice tributário e receita do go não pode ser uma linha reta. Se fosse, a receita seria maximizada na borda esquerda borda direita do gráfico; mas em ambos os lugares ela é zero. Se o índice tributário co é realmente próximo de zero, de modo que você está na região esquerda do gráfico, aumentar impostos significa aumentar a quantia que o governo tem disponível para fina serviços e programas, como você intuitivamente iria esperar. Mas se o índice está pe 100%, aumentar impostos na realidade *diminui* a receita do governo. Se você está à c do pico de Laffer e quer diminuir o déficit sem cortar despesas, há uma solução sim politicamente apetitosa: reduzir o índice tributário, e dessa forma aumentar o valo impostos arrecadados. *Para onde você deve ir depende de onde você está.*

E então, onde estamos nós? É aí que as coisas ficam encardidas. Em 1974, a taxa trib

direita da curva de Laffer tinha certo apelo – em especial para pessoas suficienter afortunadas para pagar impostos com uma taxa dessas, que somente se aplicava a r superiores aos US$ 200 mil.[f] E a curva de Laffer tinha um poderoso advogado em Wan que trouxe sua teoria para a consciência do público num livro de 1978 com um extremamente seguro de si, *The Way the World Works*.[g] Wanniski era um verdadeiro c com a mistura certa de fé e sagacidade política para fazer as pessoas escutarem uma considerada marginal mesmo pelos advogados do corte de impostos. Ele não se impo de ser chamado de maluco. "Agora, o que quer dizer 'maluco'?", ele perguntou entrevistador. "Thomas Edison era maluco, Leibniz era maluco, Galileu era maluco, e por diante. Todo mundo que chega com uma ideia nova diferente da sabedoria convenc e tem uma ideia distante das correntes principais é considerado maluco."[4]

(Aparte: é importante ressaltar aqui que pessoas com ideias fora do convencional c comparam a Edison e Galileu *nunca estão efetivamente certas*. Recebo cartas com ess de linguagem pelo menos uma vez por mês, em geral de pessoas que têm "prova afirmações matemáticas que há centenas de anos sabe-se serem falsas. Posso garantir a que Einstein não perambulou por aí dizendo às pessoas: "Veja, eu sei que essa teor relatividade geral parece uma doideira, mas foi isso que disseram de Galileu!")

A curva de Laffer, com sua representação visual compacta e seu cu convenientemente contraintuitivo, acabou se mostrando um produto fácil de se vende políticos com uma fome preexistente por corte de impostos. Nas palavras do econo Hal Varian: "Você pode explicá-la a um congressista em seis minutos e ele pode falar ela durante seis meses."[5] Wanniski tornou-se assessor primeiro de Jack Kemp, depo Ronald Reagan, cujas experiências como rico astro de cinema na década de 1940 form o substrato para sua visão da economia quatro décadas depois. Seu diretor de orçam David Stockman, recorda:

> "Eu entrei numa grana preta fazendo filmes durante a Segunda Guerra Mundial", [Reagan] sempre dizia. Naquel o imposto adicional para tempo de guerra chegava a 90%. "Você podia fazer só quatro filmes, e já estava na f cima", prosseguia ele. "Então todos parávamos de trabalhar depois de quatro filmes e saíamos para o campo índices tributários geravam menos trabalho. Baixos índices tributários geravam mais. Sua experiência provava

Hoje é difícil encontrar um economista respeitável que pense que estamos na la descendente da curva de Laffer. Talvez não seja surpresa, considerando que as rendas altas são tributadas em apenas 35%, índice que teria parecido absurdamente baixo du a maior parte do século XX. Greg Mankiw, economista em Harvard e republican presidiu o Conselho de Assessores Econômicos do segundo presidente Bush, escrev seu livro-texto de microeconomia:

> A história subsequente fracassou em confirmar a conjectura de Laffer de que índices tributários mais baixos crescer a receita tributária. Quando Reagan cortou impostos depois de ter sido eleito, o resultado foi menos rece mais. A receita dos impostos de renda de pessoas físicas (por pessoa, corrigida pela inflação) caíram 9% de 1980 embora a renda média (por pessoa, corrigida pela inflação) tenha crescido 4% no mesmo período. Contudo, u instituída a política, era difícil revertê-la.[7]

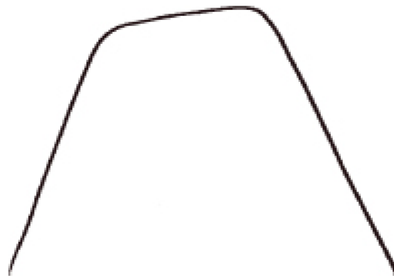
Impõe-se agora alguma solidariedade com os adeptos da economia "do lac

a Segunda Guerra Mundial fazendo trabalho militar sigiloso para o Grupo de Pes Estatística, foi adiante e se tornou Prêmio Nobel de Economia e assessor de presid além de potente defensor dos impostos baixos e da filosofia libertária. O slogan famc Friedman sobre tributação é: "Sou a favor de cortar impostos em quaisquer circunstâ e com qualquer desculpa, por qualquer motivo, sempre que possível." Ele não pensav deveríamos ter como meta chegar ao topo da curva de Laffer, onde a receita trib governamental é a mais alta possível. Para Friedman, o dinheiro obtido pelo go acabaria como dinheiro gasto pelo governo, e, na maioria das vezes, esse dinheiro er gasto, e não bem gasto.

Pensadores mais moderados adeptos da economia do lado da oferta, como Ma argumentam que impostos mais baixos podem aumentar a motivação para trabalhar e lançar negócios, acabando por levar a uma economia maior e mais forte, mesmo efeito imediato do corte de impostos seja uma receita governamental menor e d maiores. Um economista com mais simpatias redistribucionistas observaria que o co dá nos dois sentidos; talvez a capacidade reduzida do governo de gastar signifique con menos infraestrutura, regular fraudes com menos rigor e, de forma geral, fazer menos a trabalho que possibilite a prosperidade da livre iniciativa.

Mankiw também ressalta que as pessoas muito mais ricas – aquelas que estariam pag 70% na parcela superior de sua renda – contribuíram, *sim*, com mais receita tributária o corte de impostos de Reagan.[h] Isso leva à possibilidade um tanto vexatória de maneira de maximizar a receita governamental seja tascar um aumento de impostos a classe média, que não tem alternativa a não ser continuar trabalhando, e ao mesmo t fazer cortes brutais nos índices sobre os ricos; esses caras têm riqueza acumulada sufi para fazer ameaças factíveis de reduzir sua atividade econômica, ou de realizá-la no ext caso o governo lhes cobre uma taxa que considerem alta demais. Se essa história e correta, uma porção de liberais acabará subindo desconfortavelmente no barco de M Friedman: talvez maximizar a receita tributária não seja uma ideia tão boa.

A avaliação final de Mankiw é bastante polida: "Não deixa de haver mérito no argur de Laffer." Eu daria a Laffer mais crédito que isso! Seu esquema mostrou o ponto maten fundamental e incontroverso, de que a relação entre tributação e receita é necessarian não linear. Não precisa, obviamente, ser um morro único e suave como ele esboçou; pc ser algo como um trapezoide,



ou um lombo de dromedário,



ou um vale-tudo com ferozes oscilações.[i]



Mas se a ladeira é ascendente em um dos lados, precisa ser descendente em algum lugar. Existe algo do tipo ser sueco demais. Essa é uma afirmação que nenhum econo contestaria. E é também, como o próprio Laffer ressaltou, alguma coisa que foi compree por muitos cientistas sociais antes dele. Contudo, para a maioria das pessoas, não e assim tão óbvio – pelo menos até você ver a figura no guardanapo. Laffer compree muito bem que sua curva não tinha o poder de dizer se a economia de um dado pa determinado momento tinha ou não impostos altos demais. Questionado durant depoimento ao Congresso americano[8] sobre a localização precisa do índice tributário ele reconheceu: "Francamente, não posso medi-lo, mas posso lhe dizer quais são características, sim senhor." Tudo que a curva de Laffer diz é que baixar os imposto algumas circunstâncias, é aumentar a receita de impostos; mas descobrir quais são circunstâncias requer trabalho empírico profundo e difícil, o tipo de trabalho que não num guardanapo.

Não há nada de errado com a curva de Laffer – só com o uso que as pessoas fazem Wanniski e os políticos que seguiram sua flauta de Pã caíram vítimas do mais velho silog da história:

*Talvez* baixar impostos aumente a receita do governo.
Eu *quero* que baixar impostos aumente a receita do governo.
Portanto, *é* para baixar impostos e aumentar a receita do governo.

---

[a] Literalmente, "Ato de Cuidados Médicos Acessíveis", também conhecido como Patient Protection and Affordab Act ou simplesmente Obamacare, é um estatuto federal americano transformado em lei pelo presidente Barack em março de 2010, representando a mais significativa medida regulatória sobre o sistema de saúde e os planos d nos Estados Unidos. Na época, foi motivo de acalorados embates entre democratas e republicanos, sendo que estes não viam com bons olhos aquilo que consideravam uma "socialização" da medicina pública. (N.T.)

[b] Aqui, "jeito sueco de ser" refere-se a "quantidade de serviços sociais e taxação", não a outras características da

[c] Ou um segmento de reta, se você faz questão. Não vou dar muita bola para essa distinção.

[d] Em favor da clareza, devemos fazer aqui uma observação quanto à nomenclatura. Quando dizemos em portug uma variação é “linear”, estamos nos referindo a uma variação cujo gráfico é uma linha reta. Em inglês o termo *line* é usado abreviadamente na forma *line*, daí a ligação imediata com “*linearity*”. Em português essa ligação não é in pois abreviamos o termo *linha reta* simplesmente como *reta*, e não como *linha*. (N.T.)

[e] Laffer questiona a parte do guardanapo da história, recordando que o restaurante tinha chiquíssimos guardan linho que ele jamais estragaria com um rabisco sobre economia.

[f] Alguma coisa entre US$ 500 mil e US$ 1 milhão em valores atuais.

[g] Quem sou eu para falar.

[h] É difícil saber ao certo se houve aumento da receita tributária porque os ricos começaram a trabalhar mais duro menos sobrecarregados pelo imposto de renda, como prediz a teoria do lado da oferta.

[i] Ou, ainda mais provavelmente, poderia nem ser uma curva única, conforme Martin Gardner ilustrou por meio d “curva neo-Laffer” em sua ácida avaliação da teoria do lado da oferta (“The Laffer Curve”, *The Night Is Large: C Essays, 1938-1995*, Nova York, St. Martin’s, 1996, p.127-39).

# 2. Localmente reto, globalmente curvo

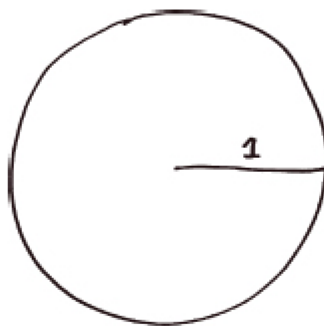
Talvez você jamais pensasse em necessitar de um matemático profissional para lhe que nem todas as curvas são linhas retas. Mas o raciocínio linear está por toda parte. o utiliza toda vez que diz que, se é bom ter alguma coisa, ter mais dessa coisa ainda é m Aqueles que berram opiniões políticas se baseiam nele: "Você apoia a ação militar co Irã? Aposto que você gostaria de lançar uma *invasão por terra* em cada país que *olhe para nós*!" Ou, do outro lado: "Envolver-se com o Irã? Você provavelmente *também* que *Adolf Hitler* foi simplesmente *malcompreendido*."

Por que esse tipo de raciocínio é tão popular, quando um instante de reflexão quanto ele é errado? Por que haveria alguém de pensar, mesmo por um segundo, que as curvas são linhas retas, quando obviamente não são?

Um dos motivos é que, num sentido, elas são. A história começa com Arquimedes.

## Exaustão

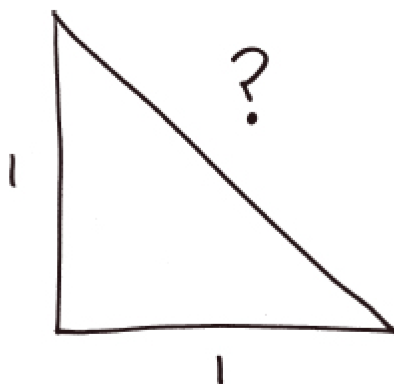
Qual a área do seguinte círculo?




No mundo moderno, esse é um problema tão padrão que poderia ser incluído exame de ensino médio. A área de um círculo é $\pi r^2$, e nesse caso o raio é 1, logo a áre Mas 2 mil anos atrás essa era uma questão incômoda, suficientemente importante chamar a atenção de Arquimedes.

Por que era tão difícil? Por uma coisa: os gregos não pensavam realmente em π com número, como nós pensamos. Os números que eles entendiam eram números inteiro contavam coisas: 1, 2, 3, 4 … Mas o primeiro grande sucesso da geometria grega – o teo de Pitágoras[a] – acabou se tornando a ruína de seu sistema numérico.

Eis uma figura:

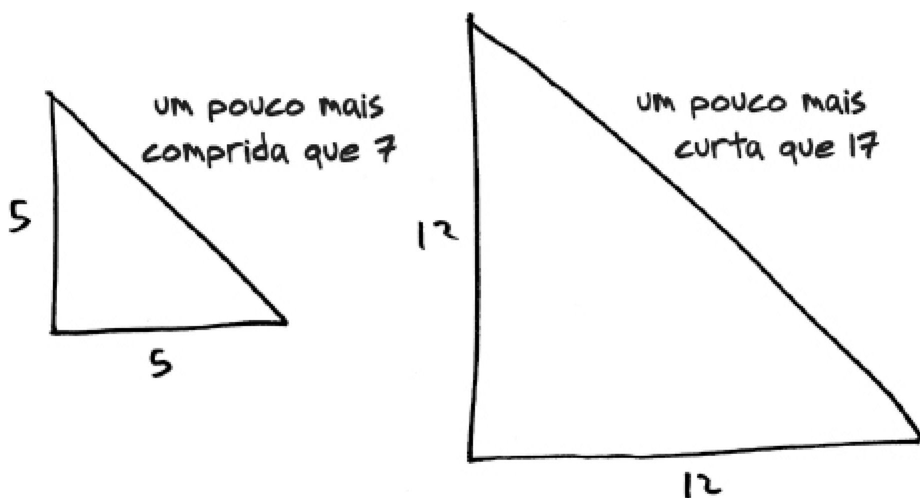



O teorema de Pitágoras nos diz que o quadrado da *hipotenusa* – o lado aqui deser
em diagonal, aquele que não toca o ângulo reto – é a soma dos quadrados dos outro
lados, ou *catetos*. Nessa figura, isso significa que o quadrado da hipotenusa é $1^2 + 1^2 =$
$= 2$. Em particular, a hipotenusa é mais comprida que 1 e mais curta que 2 (como você
verificar com seus próprios olhos, sem que se faça necessário nenhum teorema). (
comprimento não seja um número inteiro não era, em si, um problema para os g
Talvez simplesmente tenhamos medido tudo nas unidades erradas. Se escolhermos
unidade de comprimento de modo a deixar cada cateto com 5 unidades, você p
verificar com uma régua que a hipotenusa tem cerca de 7 unidades de compriment
torno disso – um pouquinho mais comprida. Pois o quadrado da hipotenusa é

$$5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$$

e se a hipotenusa fosse 7, seu quadrado seria $7 \times 7 = 49$.

Ou, se você fizer os catetos com 12 unidades de comprimento, a hipotenusa tem
exatamente 17 unidades, porém, é irritantemente curta demais, porque $12^2 + 12^2$ é 288
pitada a menos que $17^2$, que é 289.




Em algum momento por volta do século V AEC,[b] um membro da escola pitagóri
uma descoberta chocante: não havia *nenhum meio* de medir o triângulo retângulo isó
de modo que o comprimento de cada lado fosse um número inteiro. Pessoas mod
diriam que “a raiz quadrada de 2 é irracional” – isto é, não é a razão entre quaisque

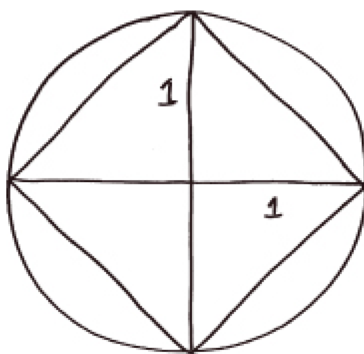
quantidade assentava-se sobre a ideia de proporção entre números inteiros. Para e comprimento daquela hipotenusa havia se revelado *não absolutamente um número*.

Isso causou um alvoroço. Os pitagóricos, você deve se lembrar, eram extremar esquisitos. Sua filosofia era uma densa mistura de coisas que agora chamaríamos de mática, de coisas que agora chamaríamos de religião e de coisas que agora chamaríam doença mental. Acreditavam que os números ímpares eram bons e os pares eram ruin um planeta idêntico ao nosso, Antícton, estava do outro lado do Sol; e que era errado c grãos, segundo alguns relatos, porque eram o repositório das almas das pessoas m Dizia-se que o próprio Pitágoras tinha a capacidade de falar com o gado (ele lhes dizia não comer grãos) e que havia sido um dos pouquíssimos gregos antigos a usar calças.

A matemática dos pitagóricos estava inseparavelmente ligada à sua ideologia. Co história (provavelmente não verdadeira, mas dá a impressão exata do estilo pitagórico o pitagórico que descobriu a irracionalidade da raiz quadrada de 2 foi um homem cha Hipaso, cuja recompensa por provar teorema tão repugnante foi ser lançado ao mar colegas, para morrer.

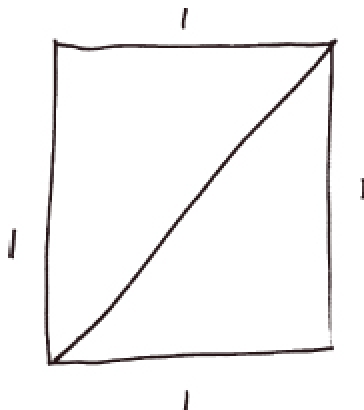
Mas não se pode afogar um teorema. Os sucessores dos pitagóricos, como Eucli Arquimedes, compreenderam que era preciso arregaçar as mangas e medir coisas, m que isso obrigasse a sair do aprazível quintal murado que era o jardim dos números int Ninguém sabia se a área de um círculo podia ser expressa usando somente números inte Mas rodas precisam ser construídas, e silos, enchidos;[d] então, as medições precisar feitas.

A ideia original vem de Eudoxo de Cnido; Euclides a incluiu como Livro 12 dos *Elem* Mas foi Arquimedes quem realmente levou o projeto à sua fruição plena. Hoje cham sua abordagem de *método da exaustão*. E ele começa assim:




O quadrado na figura é chamado *quadrado inscrito*; cada um de seus vértices a encosta no círculo, mas não se estende além da fronteira do círculo. Por que fazer Porque círculos são misteriosos e intimidantes, e quadrados são fáceis. Se você tem c de si um quadrado cujo lado de comprimento é $x$, sua área é $x$ vezes $x$ – é por iss chamamos a operação de multiplicar um número por si mesmo de elevar ao quadrac quadrar o número! Uma regra básica da vida matemática: se o Universo lhe entreg problema difícil, tente resolver outro mais fácil, em vez do primeiro, e fique na esperan que a versão simples seja próxima o bastante do problema original para o Univers fazer objeção.

O quadrado inscrito se divide em quatro triângulos, cada um dos quais nada mais o triângulo isósceles que acabamos de desenhar.[e] Logo, a área do quadrado é quatro v área do triângulo. Esse triângulo, por sua vez, é o que se obtém quando se pega um qua de 1 × 1 e o corta diagonalmente pela metade, como um sanduíche de atum.

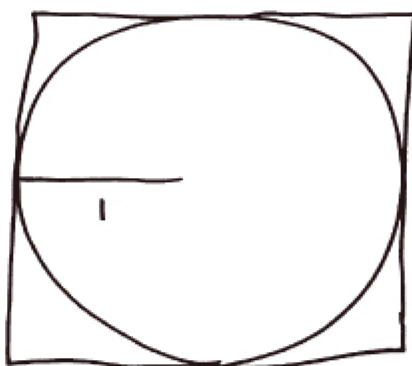



A área do sanduíche de atum é 1 × 1 = 1, logo, a área de cada meio sanduíche triar é ½ e a área do quadrado inscrito é 4 × ½, ou 2.

Falando nisso, suponha que você *não* saiba o teorema de Pitágoras. Adivinhe só – sabe, sim! Ou pelo menos sabe o que ele tem a dizer a respeito desse triângulo retâ específico. Porque o triângulo retângulo que forma a metade inferior do sanduíche de é exatamente igual ao que está no quadrante noroeste do quadrado inscrito. E sua hipot está inscrita no lado do quadrado. Então, quando você eleva a hipotenusa ao quadrado obtém a área do quadrado inscrito, que é 2. Ou seja, a hipotenusa é aquele número q ser elevado ao quadrado, dá 2; ou, no jargão usual mais conciso, raiz quadrada de 2.

O quadrado inscrito está inteiramente contido dentro do círculo. Se sua área é 2, do círculo deve ser *pelo menos* 2.

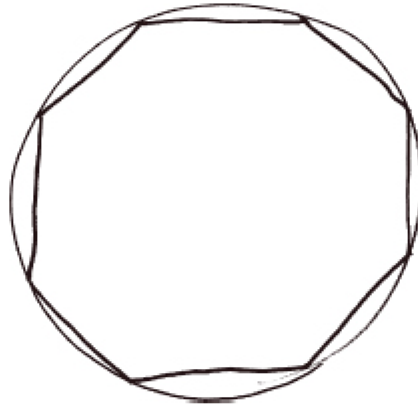
Agora desenhamos outro quadrado:




Este é o chamado quadrado *circunscrito*; ele também toca o círculo exatamente em q pontos. Mas esse quadrado contém o círculo. Seus lados têm comprimento 2, então su é 4; e assim sabemos que a área do círculo é no máximo 4.

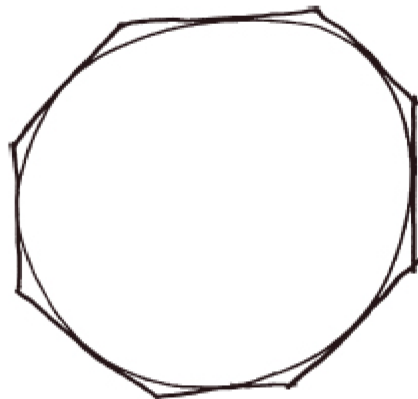
Demonstrar que π está entre 2 e 4 talvez não seja tão impressionante. Mas Arquir mal começou. Pegue os quatro cantos do seu quadrado inscrito e marque novos pont

círculo na metade do caminho entre cada par de vértices adjacentes. Agora você ten pontos igualmente espaçados. Quando você os liga, obtém um octógono inscrito, o linguagem técnica, uma placa de trânsito “Pare”:



Calcular a área do octógono inscrito é um pouco mais difícil, e eu vou poupar vc trigonometria. O importante é que isso tem a ver com linhas retas e ângulos, e nãc curvas; então, era possível fazer com os métodos disponíveis a Arquimedes. E a áre dobro da raiz quadrada de 2, que é mais ou menos 2,83.

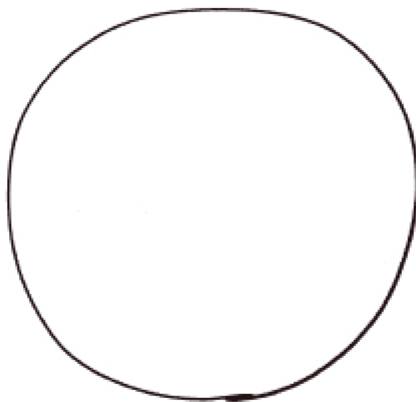
Você pode fazer o mesmo jogo com o octógono circunscrito,



cuja área é $8(\sqrt{2} - 1)$, pouco mais de 3,31.

Portanto, a área do círculo está presa entre 2,83 e 3,31.

Por que parar aqui? Você pode inserir pontos entre os vértices do octógono (seja in ou circunscrito) para criar um 16-gono; depois de mais alguns cálculos trigonomét isso lhe diz que a área do círculo está entre 3,06 e 3,18. Faça mais uma vez, criando u gono; e mais outra, e mais outra, e em pouquíssimo tempo você terá algo com um as mais ou menos assim:

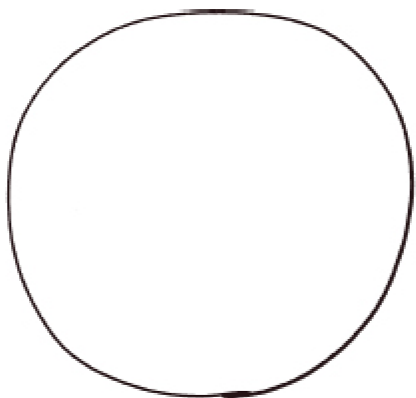


Espere aí, isso não é justamente o círculo? Claro que não! É um polígono regula 65.536 lados. Você não percebeu?

O grande insight de Eudoxo e Arquimedes foi que *não importa* se é um círculo o polígono com muitos lados muito pequenos. As duas áreas estarão suficientemente pró para qualquer propósito que você possa ter em mente. A área da minúscula margem o círculo e o polígono foi levada à "exaustão" pela nossa inexorável iteração. O círcul uma curva, é verdade. Mas cada pedacinho mínimo dele pode ser aproximado po linha perfeitamente reta, assim como o minúsculo pedaço da superfície da Terra so qual estamos parados é bem aproximado por um plano perfeitamente achatado.[f]

O slogan a se ter em mente é: localmente reto, globalmente curvo.

Ou pense nisso assim. Você está descendo em direção ao círculo vindo de uma g altitude. No começo você vê a coisa inteira:



Depois só um segmento de arco:



E um segmento ainda menor:

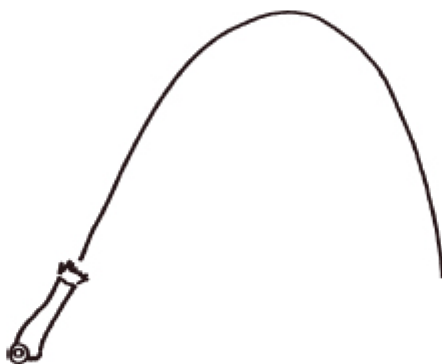


Até que, aproximando, e aproximando, o que você vê é praticamente indistinguí uma reta. Uma formiga nesse círculo, cônscia apenas de seus arredores imediatos, pe estar numa linha reta, assim como uma pessoa na superfície da Terra (a não ser qu esperta o bastante para observar objetos surgindo no horizonte à medida que e aproximam de longe) sente que está parada num plano.

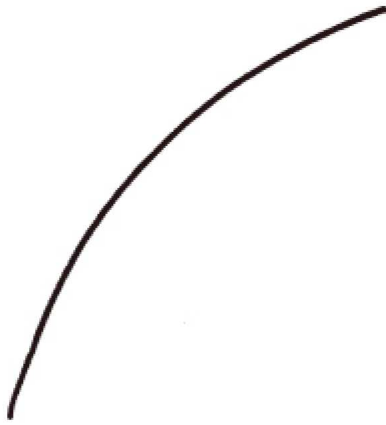
## A página em que eu lhe ensino cálculo

Vou lhe ensinar cálculo. Pronto? A ideia, pela qual devemos agradecer a Isaac New que não existe nada de especial em relação a um círculo perfeito. *Toda* curva suave, q você se aproxima o suficiente, parece exatamente uma reta. Não importa quanto el sinuosa ou retorcida – basta que não tenha qualquer canto reto.

Quando você dispara um míssil, a trajetória tem o seguinte aspecto:



O míssil sobe, depois desce, numa arco de parábola. A gravidade torna todo movir curvo no sentido da Terra; isso está entre os fatos fundamentais da nossa vida física. se aproximamos a lente e focalizamos um segmento muito curto, a curva começa a seguinte aspecto:



E depois este:



Da mesma maneira que o círculo, a trajetória do míssil a olho nu parece uma linha progredindo para cima com uma certa inclinação. O desvio em relação à reta causado gravidade é pequeno demais para ser visto – mas continua lá, claro. A aproximação da sobre uma região ainda menor da curva faz com que esta se torne ainda mais parecida uma reta. Mais perto e mais reto, mais perto e mais reto…

Agora vem o salto conceitual. Newton disse, olhe aqui, vamos até o fim. Reduza campo de visão até que ele seja *infinitesimal* – tão pequeno que é menor que qua tamanho possível de ser nomeado, mas não zero. Você está estudando o arco do míss ao longo de um intervalo de tempo muito curto, mas num único momento. O que era uma reta torna-se *exatamente* uma reta. E a inclinação dessa reta é o que Newton ch de *fluxão* e o que chamamos agora de *derivada*.

Esse é o tipo de salto que Arquimedes não estava disposto a dar. Ele compreende polígonos com lados cada vez menores chegavam mais e mais perto do círculo – mas j teria dito que o círculo *era* realmente um polígono com um número infinito de peq lados.

Alguns dos contemporâneos de Newton também relutaram em acompanhá-lo e viagem. Seu opositor mais famoso foi George Berkeley, que denunciou os infinitesim Newton num tom de alta zombaria tristemente ausente da literatura matemática cor "E o que são essas fluxões? As velocidades de incrementos evanescentes. E o que são incrementos evanescentes? Não são grandezas finitas nem grandezas infinitamente p

E todavia o cálculo *funciona*. Se você gira uma pedra amarrada num barbante sob cabeça e de repente a solta, ela será disparada numa trajetória retilínea com veloc constante,[g] exatamente na direção que o cálculo diz que a pedra está se movendo no in exato em que você a solta. Esse é outro insight newtoniano: objetos em movimento te a prosseguir numa trajetória retilínea, a menos que alguma outra força interfira para d o objeto numa direção ou outra. Essa é uma razão de o pensamento linear nos vir com naturalidade: nossa intuição em relação ao tempo e ao movimento é formada pelos menos que observamos no mundo. Mesmo antes de Newton ter codificado suas leis em nós sabia que as coisas gostam de se mover em linha reta, a não ser que haja a motivo para que ocorra algo diferente.

## Incrementos evanescentes e perplexidades desnecessárias

Os críticos de Newton tinham razão num ponto: sua construção das derivadas não redu no que hoje chamamos de rigor matemático. O problema é a noção do infinitar pequeno, que foi um aspecto ligeiramente nebuloso para os matemáticos durante mil de anos. O problema começou com Zeno, filósofo grego do século V AEC, da escola ele que se especializou em fazer perguntas aparentemente inocentes sobre o mundo físic imediatamente floresciam em gigantescos bafafás filosóficos.

Seu paradoxo mais famoso é o seguinte. Eu decido caminhar até a sorveteria. Agora certeza não posso chegar à sorveteria sem percorrer metade do caminho até ela. E un tendo chegado à metade do caminho, não posso chegar sem percorrer metade do can que resta. Tendo feito isso, ainda preciso cobrir metade da distância restante. E assi diante, e assim por diante. Posso ir chegando cada vez mais perto da sorveteria – p não importa quantos passos do processo eu execute, jamais efetivamente *alcanç* sorveteria. Estou sempre a alguma distância minúscula, mas diferente de zero, da n casquinha com calda. Portanto, concluiu Zeno, é impossível andar até a sorveter argumento funciona para qualquer destino; é igualmente impossível atravessar a ru um único passo ou acenar com a mão. Todo movimento é descartado.

Dizia-se que Diógenes, o Cínico, teria refutado o argumento de Zeno ficando en percorrendo a sala. Esse é um argumento bastante bom para mostrar que o movime possível. Então, algo deve estar errado com o argumento de Zeno. Mas onde está o er

Vamos decompor numericamente a ida à sorveteria. Primeiro você percorre meta caminho. Depois percorre a metade da distância que resta, que é ¼ da distância total, fi ¼ para percorrer. Então metade do que resta é $1/8$, depois $1/16$, depois $1/32$. O seu prog rumo à sorveteria é assim:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

Se você somar dez termos dessa sequência obterá mais ou menos 0,999. Se somar v
termos chega perto de 0,999999. Em outras palavras, você está chegando realmente, realmente, realmente, realmente perto da sorveteria. Mas não importa quantos termo
você some, nunca chega a 1.

O paradoxo de Zeno é muito parecido com qualquer outro enigma: o decimal rep
0,99999… é igual a 1?

Tenho visto gente quase dar um ataque com essa questão.[h] Ela é acaloradamente disc
em websites de fãs do jogo World of Warcraft até fóruns de debate sobre a filósofa Ayn R
Nosso sentimento mútuo sobre Zeno é: "Claro que você acaba chegando à sorveteria.
nesse caso a intuição aponta para o sentido oposto. A maioria das pessoas, se você press
las,[3] diz que 0,9999… não é igual a 1. Não *parece* 1, isso é certo. Parece menor. Ma
muito menor! Como o faminto amante de sorvetes de Zeno, ele vai chegando cada vez
perto da meta, mas, ao que parece, jamais consegue chegar lá.

No entanto, professores de matemática em toda parte, inclusive eu mesmo, lhe d
"Não, é 1."

Como eu convenço alguém a vir para o meu lado? Um bom artifício é argumentar
se segue. Todo mundo sabe que

$$0{,}33333\ldots. = \frac{1}{3}.$$

Multiplique ambos os lados por 3 e você verá

$$0{,}99999\ldots = \frac{3}{3} = 1.$$

Se isso não abala você, tente multiplicar 0,99999… por 10, que é só uma quest
mover a vírgula decimal uma casa para a direita.

$$10 \times (0{,}99999\ldots) = 9{,}99999\ldots$$

Agora subtraia o incômodo decimal de ambos os lados:

$$10 \times (0{,}99999\ldots) - 1 \times (0{,}99999\ldots) = 9{,}99999\ldots - 0{,}99999\ldots$$

O lado esquerdo da equação é simplesmente 9 × (0,99999…) porque 10 vezes al
coisa menos essa coisa é 9 vezes a coisa mencionada. E do lado direito demos um je
cancelar o terrível decimal infinito e ficamos com um simples 9. Então acabamos com

$$9 \times (0{,}99999\ldots) = 9.$$

Se 9 vezes alguma coisa é 9, essa coisa só pode ser 1 – não é?

Esses argumentos em geral são suficientes para trazer as pessoas para o nosso lado sejamos honestos: está faltando alguma coisa neles. Eles não abordam realmente a ar incerteza induzida pela alegação 0,99999… = 1; em vez disso, representam um tij intimidação algébrica. “Você acredita que ⅓ é 0,3 repetido – não acredita? *Não acredi*

Ou pior: talvez você tenha aceitado o meu argumento baseado na multiplicação p Mas que tal este? O que é

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …?

Aqui o “…” significa “continue esta soma para sempre, adicionando cada vez o d Sem dúvida a soma deve ser infinita! Mas um argumento como o aparentemente cc referente a 0,9999… parece sugerir outra coisa. Multiplique a soma acima por 2 e obtém

2 × (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …) = 2 + 4 + 8 + 16 + …,

que parece muito a soma original; de fato, é exatamente a soma original (1 + 2 + 4 + 8 + …) com o 1 tirado do começo, o que significa que 2 × (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …) é 1 a n que (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …). Em outras palavras:

2 × (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …) − 1 × (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …) = −1.

Mas o lado esquerdo resulta na própria soma com que começamos, e então ficamos

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + … = −1.

É *nisso* que você quer acreditar?[i] Que somar números cada vez maiores, ad infin joga você na terra dos números negativos?

Mais maluquice: Qual é o valor da soma infinita

1 − 1 + 1 − 1 + 1 − 1 + …

Pode-se observar inicialmente que a soma é

(1 − 1) + (1 − 1) + (1 − 1) + … = 0 + 0 + 0 + …

e argumentar que a soma de um monte de zeros, mesmo numa quantidade infinita, te ser zero. De outro lado, 1 − 1 + 1 é a mesma coisa que 1 − (1 − 1), porque negati negativo é positivo; aplicando este fato vezes e vezes repetidas, podemos reescrever a como

1 − (1 − 1) − (1 − 1) − (1 − 1) … = 1 − 0 − 0 − 0…

Então, qual é a resposta, zero ou 1? Ou será, de algum modo, zero na metade das v 1 na outra metade das vezes? Parece depender de onde você para – mas somas infinit param nunca!

Não resolva ainda, porque a coisa fica pior. Suponha que o valor da nossa soma mist seja T:

$$T = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Multiplicando ambos os lados por −1, teremos

$$-T = -1 + 1 - 1 + 1 \dots$$

Mas a soma no lado direito é precisamente o que se obtém quando pega a soma or definindo T e tira fora aquele primeiro 1, ou seja, subtraindo 1; em outras palavras,

$$-T = -1 + 1 - 1 + 1 \dots = T - 1.$$

Logo, $-T = T - 1$ é uma equação em T que é satisfeita apenas quando T é igual a ½. uma soma de infinitos números inteiros, num passe de mágica, virar uma fração? Se não, você tem o direito de alimentar pelo menos alguma suspeita de argumentos che artimanha como este. Mas note que algumas pessoas disseram sim, inclusive o mater e padre italiano Guido Grandi,[4] em homenagem a quem a série 1 − 1 + 1 − 1 + 1 − 1 + batizada. Num artigo de 1703, ele argumentou que a soma da série é ½; e, mais aind essa conclusão milagrosa representava a criação do Universo a partir do nada. (N preocupe, eu também não sigo este último passo.) Outros importantes matemátic época, como Leibniz e Euler, estavam a bordo do estranho cálculo de Grandi, se não interpretação.

Mas na verdade a resposta para a charada do 0,999… (e para o paradoxo de Zeno, a série de Grandi) jaz um pouco mais fundo. Você não precisa se render à minha que braço algébrica. Você pode, por exemplo, insistir em que 0,999… não é igual a 1, e si menos um minúsculo número infinitesimal. Sob esse aspecto, pode insistir também e 0,333… não é *exatamente* igual a ⅓, e também por uma diferença infinitesimal. Esse de vista requer alguma energia para forçar sua comprovação, mas isso pode ser feito. vez tive um aluno de cálculo chamado Brian que, descontente com as definições de s aula, deduziu um bom bocado da teoria sozinho, referindo-se a suas grandezas infinites como “números de Brian”.

Brian na verdade não foi o primeiro a chegar lá. Existe todo um campo da mater especializado em estudar números desse tipo, chamado *análise não padronizada*.[j] A t desenvolvida por Abraham Robinson em meados do século XX, finalmente deu sentic “incrementos evanescentes” que Berkeley achou tão ridículos. O preço que se tem a (ou, de outro ponto de vista, a recompensa que se tem a colher) é uma profusão de tipos de número; não só infinitamente pequenos, mas infinitamente grandes, uma n

E aconteceu de Brian estar com sorte – eu tinha um colega em Princeton, Edward N especialista em análise não padronizada. Arranjei um encontro entre os dois para que aprendesse mais sobre o assunto. O encontro, Ed me contou depois, não foi muito Assim que Ed deixou claro que as grandezas infinitesimais na verdade não viriam chamadas de *números de Brian*, Brian perdeu todo o interesse.

(Moral da história: pessoas que entram na matemática em busca de fama e glóri ficam na matemática por muito tempo.)

Mas não chegamos mais perto de resolver nossa discussão. O que é 0,999… *de fato* Ou é algum número infinitesimalmente menor que 1, um tipo doido de número que sequer havia sido descoberto cem anos atrás?

A resposta correta é desfazer a pergunta. O que é 0,999… de fato? O número par referir a uma espécie de soma:

0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + …

Mas o que significa isso? Essas desagradáveis reticências parecem ser o verda problema. Não pode haver controvérsia sobre o que significa somar dois, ou três, ou números. Essa é simplesmente a notação matemática para um processo físico que ent mos muito bem: pegue cem pilhas de alguma coisa, misture tudo e veja quanto você Mas e infinitas pilhas? Isso é outra história. No mundo real, nunca se pode ter quantidade infinita de pilhas. Qual o valor numérico de uma soma infinita? Ela não te valor – *até nós lhe darmos um*. Essa foi a grande inovação de Augustin-Louis Cauchy introduziu no cálculo a noção de *limite*, na década de 1820.[1]

O teórico britânico dos números G.H. Hardy, em seu livro *Divergent Series*, de explica melhor:

> Não ocorre a um matemático moderno que uma coleção de símbolos matemáticos devesse ter um "significado" lhe seja atribuído um por definição. Essa não era uma trivialidade nem para os maiores matemáticos do século Eles não tinham o hábito da definição: não era natural para eles dizer, em algumas palavras, "por *X queremos* … É uma verdade bem ampla dizer que os matemáticos antes de Cauchy não perguntavam "Como *definiremos* 1 − 1 + …", e sim "O que *é* 1 − 1 + 1 − 1 + …?", e que esse hábito mental os levava a perplexidades e contro desnecessárias que muitas vezes se tornavam verbais.

Isso não é só relativismo matemático relaxado. Só porque *podemos* atribuir qua significado matemático que nos aprouver a uma corrente de símbolos matemáticos, iss significa que devamos fazê-lo. Em matemática, como na vida, há boas e más escolha contexto matemático, as escolhas boas são aquelas que resolvem perplexidades desne rias sem criar novas.

A soma 0,9 + 0,09 + 0,009 + … vai chegando cada vez mais perto de 1 à medid novos termos são acrescentados. E nunca chega muito mais longe. Não importa apertado seja o cordão que amarremos em torno do número 1, após uma quantidade de passos, a soma acabará por penetrar nesse cordão para nunca mais sair. Nessas cir tâncias, disse Cauchy, deveríamos simplesmente *definir* o valor da soma infinita com aí ele trabalhou duro para provar que comprometer-se com essa sua definição não fazi

havia construído um arcabouço que tornou absolutamente rigoroso o cálculo de Ne Quando dizemos que uma curva tem localmente o aspecto de uma reta, em um certo âı agora queremos dizer mais ou menos isso: à medida que você aproxima a lente, a cu assemelha cada vez mais à reta dada. Na formulação de Cauchy, não há necessida mencionar números infinitamente pequenos, nem nada que fizesse um cético se assus

Claro que há um custo nisso. A razão de o problema do 0,999... ser difícil é qu provoca um conflito em nossas intuições. Nós gostaríamos que a soma de uma série in se encaixasse direitinho nas manipulações aritméticas como as que realizamos nas pá anteriores, e isso parece exigir que a soma seja igual a 1. Por outro lado, gostaríamo cada número fosse representado por uma cadeia única de dígitos decimais, o que ent conflito com a alegação de que o mesmo número possa ser chamado de 1 ou de 0,9 conforme nos dê vontade. Não podemos nos prender simultaneamente a esses dois de um deles precisa ser descartado. Na abordagem de Cauchy, que tem provado amplar seu valor nos dois séculos depois de ser inventada, é a singularidade da expansão de que voa pela janela. Nós não temos problema com o fato de que nosso idioma às vezes u duas séries de letras (isto é, duas palavras) para se referir à mesma coisa, os sinônim mesma maneira, não é tão ruim assim que duas diferentes séries de dígitos possam se r ao mesmo número.

Quanto ao 1 − 1 + 1 − 1 + ... de Grandi, esta é uma das séries que estão fora do al da teoria de Cauchy, ou seja, uma das *séries divergentes* que constituíam o tema do liv Hardy. O matemático norueguês Niels Henrik Abel, um dos primeiros fãs da abordag Cauchy, escreveu em 1828: "Séries divergentes são invenção do diabo, e é uma verg basear nelas qualquer demonstração."[m] A visão de Hardy, que é a nossa atual, é complacente. Há algumas séries divergentes às quais devemos atribuir valores e out quais não devemos, e algumas às quais devemos ou não, dependendo do contexto nc surge a série. Os matemáticos modernos diriam que, se vamos atribuir um valor à sé Grandi, deveria ser ½, porque, como se descobriu, todas as teorias interessantes de s infinitas ou dão valor ½ ou, como na teoria de Cauchy, não lhe atribuem qualquer val

Anotar precisamente a definição de Cauchy exige um pouco mais de trabalho. Isso especialmente para o próprio Cauchy, que não havia elaborado as ideias em sua forma e moderna.[o] (Em matemática, muito raramente você obtém o relato mais claro de uma da pessoa que a inventou.) Cauchy era um resoluto conservador e monarquista, ma sua matemática, foi orgulhosamente revolucionário e um flagelo para a autoridade a mica. Uma vez que compreendeu como fazer as coisas sem os perigosos infinitesi reescreveu unilateralmente seu programa de estudos na École Polytechnique de m refletir suas novas ideias. Isso enfureceu todo mundo ao seu redor: seus mistificados al que haviam se matriculado em cálculo para principiantes; seus colegas, que sentiam c estudantes de engenharia da École não tinham necessidade do nível de rigor de Cau os administradores, cujas ordens de se ater à diretriz oficial do curso haviam sido co tamente ignoradas. A École impôs um novo currículo, que enfatizava a abordagem in simal tradicional do cálculo, e colocou na aula de Cauchy encarregados de tomar nota se assegurar de que ele ia obedecer. Cauchy não obedeceu. Não estava interessad

É difícil defender a posição de Cauchy com fundamentos pedagógicos. Mas, de qua maneira, sou solidário com ele. Um dos grandes prazeres da matemática é o inconfu sentimento de ter entendido algo do jeito certo, tim-tim por tim-tim, até o final. Esse sentimento que não experimentei em nenhuma outra esfera da vida mental. E quand sabe como fazer alguma coisa do jeito certo, é difícil – para alguns teimosos, imposs obrigar-se a explicá-la do modo errado.

---

[a] Aliás, não sabemos quem foi o primeiro a provar o teorema de Pitágoras, mas os estudiosos estão quase certos não foi o próprio Pitágoras. Na verdade, além do fato nu e cru, atestado por contemporâneos, de que um home com esse nome viveu e ganhou fama no século VI Antes da Era Comum (AEC), não sabemos praticamente Pitágoras. Os principais relatos de sua vida e obra datam de quase oitocentos anos após sua morte. Nessa época, a real Pitágoras havia sido completamente substituída pelo Pitágoras mito, uma espécie de síntese em um só indiv filosofia dos eruditos que se autodenominavam pitagóricos.

[b] AEC: Antes da Era Comum; EC: Era Comum: notação adotada na ciência, em substituição a a.C. e d.C. (N.T.)

[c] De fato não se pode, mas ninguém descobriu como provar isso até o século XVIII.

[d] Na verdade, os silos não eram redondos até o começo do século XX, quando um professor da Universidade de Wis H.W. King, inventou o desenho cilíndrico agora onipresente para solucionar o problema da deterioração dos cer cantos do armazém.

[e] Ao contrário, cada um dos quatro pedaços pode ser obtido a partir do triângulo retângulo isósceles original desl o e girando-o pelo plano; assumimos como dado que essas manipulações não modificam a área da figura.

[f] Pelo menos se, como eu, você mora no Meio-Oeste dos Estados Unidos.

[g] Desconsiderando os efeitos da gravidade, da resistência do ar etc. Mas, numa escala de tempo reduzida, a aprox linear é mais que suficiente.

[h] Tudo bem, devo reconhecer que essa gente em particular eram adolescentes num acampamento de férias ded matemática.

[i] Só para não deixar você no ar: há um contexto, o de *números 2-ádicos*, no qual esse argumento de aparência mal completamente correto. Mais sobre isso nas notas finais, para os entusiastas da teoria dos números. Na teoria de uma série que converge para um limite x significa que quando se somam mais e mais termos, o total vai chegan vez mais próximo de x. Isso requer que tenhamos em mente uma ideia do que significa dois números estarem "pr um do outro. Acontece que a noção familiar de proximidade não é a única! No mundo 2-ádico, diz-se que dois n são próximos entre si quando sua diferença é um múltiplo de uma potência grande de 2. Quando dizemos que a s 2 + 4 + 8 + 16 + … converge para −1, estamos dizendo que as somas parciais 1, 3, 7, 15, 31 … estão chegando mai perto de −1. Com o significado usual de "próximo" isso não é verdade, mas usando a proximidade 2-ádica a históri Os números 31 e −1 têm uma diferença de 32, que é 25, um número 2-ádico bastante pequeno. Some mais alguns e você obtém 511, cuja diferença de −1 é de apenas 512, ainda pequeno (2-adicamente). Muito da matemática q conhece – cálculo, logaritmos e exponenciais, geometria – tem um análogo 2-ádico (e de fato um análogo *p*-ádi qualquer *p*), e a interação entre todas essas diferentes noções de proximidade é uma história maluca e gloriosa po

[j] Usa-se também o termo *análise não standard*. (N.T.)

[k] Os *números surreais*, desenvolvidos por John Conway, são exemplos charmosos e especialmente esquisitos, com o nome; são estranhos híbridos entre números e estratégia de jogos, e sua profundidade ainda não foi plenamente ex O livro *Winning Ways*, de Berlekamp, Conway e Guy, é um bom lugar para aprender sobre esses números exó paralelamente, de saber muito mais sobre a rica matemática dos jogos.

[l] Como todos os grandes avanços matemáticos, a teoria dos limites de Cauchy teve precursores – por exemplo, a d de Cauchy estava muito no espírito das fronteiras para os termos de erro da série binomial de D'Alembert. inquestionável que Cauchy foi o ponto da virada; depois dele, a análise é moderna.

[m] Irônico, considerando-se a aplicação teológica original de Grandi de sua série divergente!

[n] Nas famosas palavras de Lindsay Lohan: "O limite não existe!"

[o] Se alguma vez você já fez um curso de matemática que usa épsilons e deltas, já viu os descendentes das definições de Cauchy.

# 3. Todo mundo é obeso

O COMEDIANTE *stand-up* Eugene Mirman conta essa piada sobre estatística. Ele diz que
de dizer às pessoas: "Eu li que 100% dos americanos eram asiáticos." "Mas, Eugene", pr
seu companheiro, confuso, "*você* não é asiático." E a tirada, contada com uma segu
magnífica: "Mas eu li que era!"

Pensei na piada de Mirman quando encontrei um artigo na revista *Obesity*[1] cujo
apresentava uma desconcertante pergunta: "Será que todos os americanos vão ficar
do peso ou se tornar obesos?" Como se não bastasse a pergunta retórica, o artigo for
resposta: "Sim, por volta de 2048."

Em 2048 terei 77 anos e espero não estar acima do peso. Mas eu li que estaria!

O artigo da *Obesity* teve muita publicidade, como se pode imaginar. A ABC News al
para um "apocalipse de obesidade".[2] O *Long Beach Press-Telegram* saiu com a si
manchete "Estamos ficando mais gordos".[3] Os resultados do estudo ressoavam como a
recente manifestação da febril e constante ansiedade com que os americanos sempre
templaram o estado moral do país. Antes de eu nascer, os rapazes deixavam crescer o c
e, portanto, estávamos sujeitos a ser açoitados pelos comunistas. Quando eu era cr
jogávamos videogame demais, o que nos condenava a perder a competição com os i
triosos japoneses. Agora comemos fast-food demais, e todos morreremos fracos e im
cercados de embalagens de papelão vazias, estirados em sofás dos quais há muito perd
a capacidade de nos levantar. O artigo certificava essa ansiedade como um fato cien
mente comprovado.

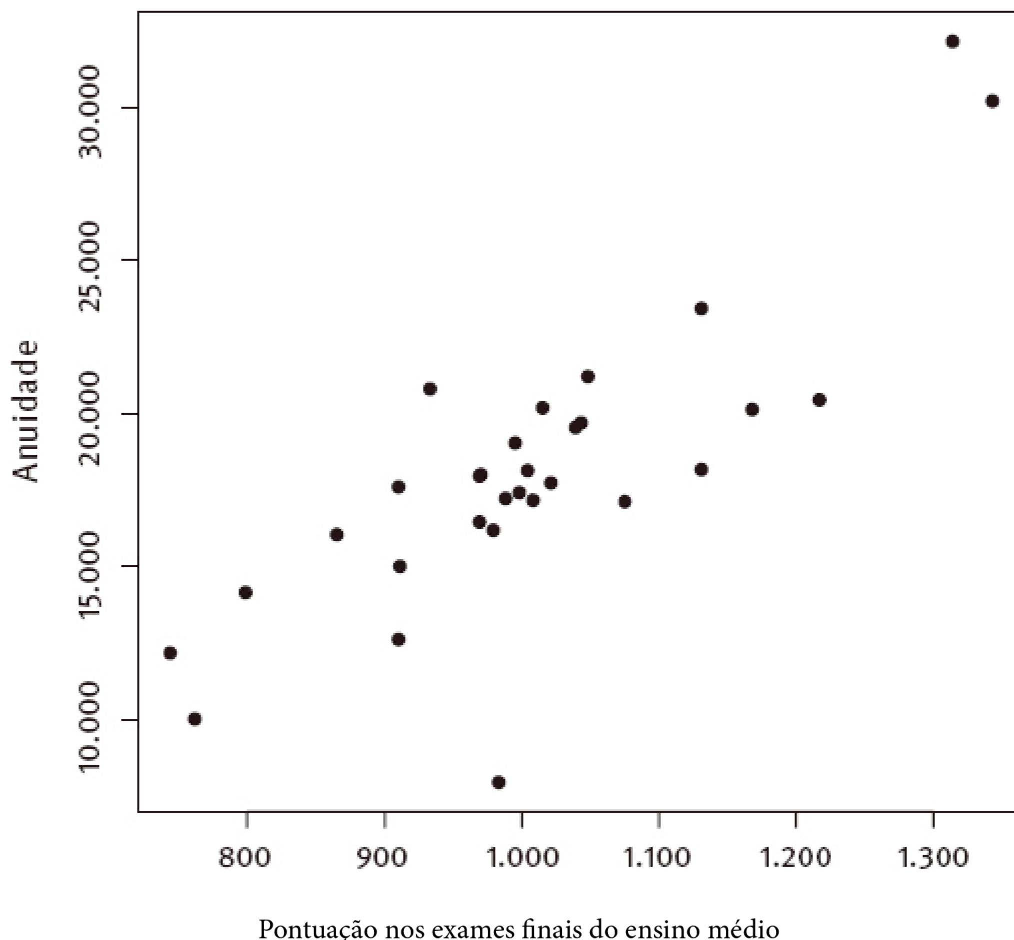
Tenho uma boa notícia. Não vamos todos estar acima do peso em 2048.[4] Por quê? P
nem toda curva é uma reta.

Mas toda curva, como acabamos de aprender com Newton, é bem próxima de uma
Essa é a ideia que orienta a *regressão linear*, técnica estatística que está para as cié
sociais como a chave de fenda para os consertos domésticos. É aquela ferramenta que
vai usar quase com certeza, qualquer que seja o serviço. Toda vez que você lê no jorna
pessoas com mais primos são mais felizes, ou que países com mais Burger King
preceitos morais mais amplos, ou que cortar pela metade seu consumo de vitami
duplica seu risco de ter pé de atleta, ou que cada US$ 10 mil a mais de renda tornam
3% mais propenso a votar no Partido Republicano,[a] você está encontrando o resulta
uma regressão linear.

Eis como ela funciona. Você tem duas coisas que quer relacionar – digamos, o cus
anuidades da universidade e a média de resultados dos exames finais do ensino médi

é uma lei universal. A Elon University, nos arredores de Burlington, Carolina do Nort uma pontuação média combinada de matemática e temas dissertativos de 1.217, e uma anuidade de US$ 20.441. O Guilford College, que fica nas proximidades, em Gr boro, é um pouco mais caro, cobrando US$ 23.420, mas a média de ingresso de cal nos exames de conclusão é de apenas 1.131.

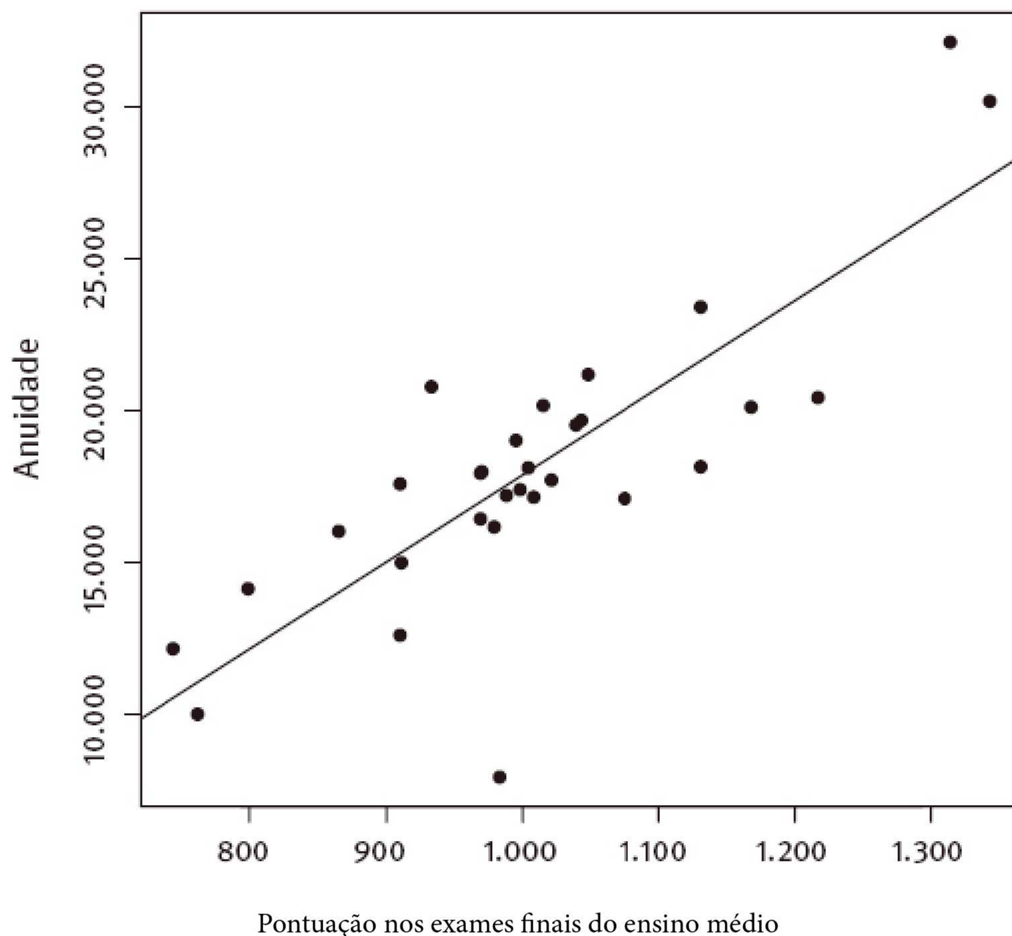
Ainda assim, se você olhar uma lista inteira de escolas – digamos, as 31 universi privadas que informaram suas anuidades e pontuações para a Rede de Recursos de Ca da Carolina do Norte[5] em 2007, perceberá uma tendência clara.



Pontuação nos exames finais do ensino médio

Cada ponto do gráfico representa uma das faculdades. Os dois pontos bem altos no superior direito, com escores de exames nas alturas e preços idem? São Wake Fo Davidson. O ponto solitário perto da base, a única escola privada na lista com anu inferior a US$ 10 mil, Cabarrus College of Health Sciences.

A figura mostra claramente que escolas com escores mais elevados têm preços mais Mais *quanto* mais altos? É aí que a regressão linear entra em cena. Os pontos na figur estão obviamente numa linha reta. Provavelmente você desenharia uma linha reta a livre cortando muito aproximadamente o meio dessa nuvem de pontos. A regressão expulsa o trabalho de adivinhação, achando a reta que mais se aproxima[b] daquela que por todos os pontos. Para as faculdades da Carolina do Norte, a figura fica com o seg aspecto:




A reta na figura tem uma inclinação de cerca de 28. Isso significa: se a anuidade fo: fato totalmente determinada pela pontuação dos exames finais segundo a reta que des no gráfico, cada ponto extra nos exames corresponderia a US$ 28 adicionais na anui Se você puder aumentar a média nos exames dos seus calouros admitidos em cinq pontos, poderá cobrar US$ 1.400 a mais de anuidade. (Ou, do ponto de vista dos pais melhora de cem pontos do filho vai lhes custar US$ 2.800 adicionais por ano. O preparatório para os exames saiu mais caro do que se imaginou!)

A regressão linear é uma ferramenta maravilhosa, escalável e tão fácil de executar q clicar um botão na sua planilha. Você pode usá-la para conjuntos de dados envolvendc variáveis, como o que acabei de desenhar aqui, mas funciona igualmente bem par variáveis, ou mil. Sempre que você deseja entender que variáveis conduzem a outras vari e em que direção, ela é a primeira coisa à qual você recorre. E funciona absolutament qualquer conjunto de dados.

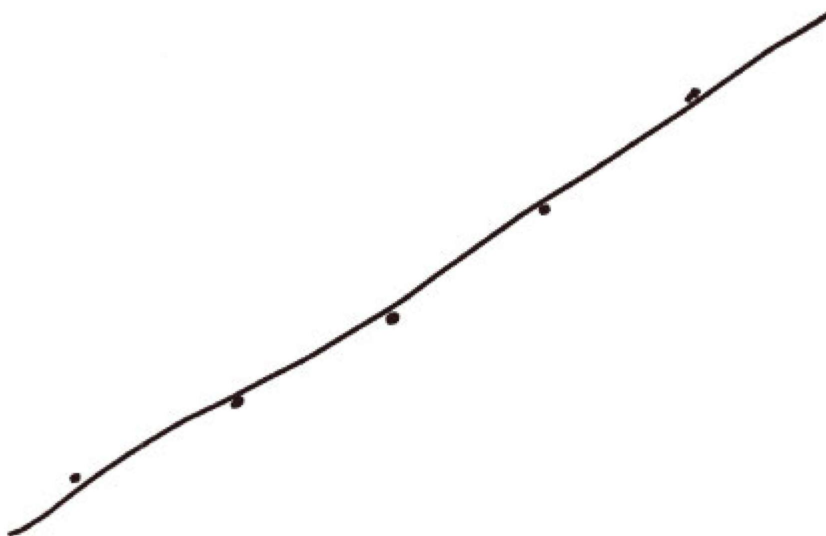
Isso é tanto uma fraqueza quanto uma força. Você pode fazer regressão linear sem p se o fenômeno que está modelando é realmente próximo de linear. *Mas não deve*. Eu que a regressão linear é como uma chave de fenda, e isso é verdade; contudo, em sentido, parece mais uma serra de bancada. Se você usá-la sem prestar cuidadosa at ao que está fazendo, os resultados podem ser horripilantes.

Pegue, por exemplo, o míssil que disparamos no capítulo anterior. Talvez não tenh você quem disparou o míssil. Talvez você seja, ao contrário, o alvo pretendido. Com você tem um profundo interesse em analisar a trajetória do míssil o mais exatar

Talvez você tenha registrado num gráfico a posição vertical do míssil em cinco mom distintos, obtendo o seguinte:



Agora você faz uma rápida regressão linear e obtém ótimos resultados. Há uma ret passa quase exatamente pelos pontos que você registrou.



(É nesse instante que as suas mãos começam a se arrastar, impensadamente, em di à afiada lâmina da serra.)

Sua reta fornece um modelo muito preciso para o movimento do míssil: para cada m que passa, o míssil aumenta sua altitude num valor fixo, digamos, 400 metros. Após hora, ele está 24 quilômetros acima da superfície da Terra. E quando é que ele desce desce nunca! Uma reta inclinada ascendente simplesmente continua a subir. É iss fazem as retas.

(Sangue, gritos.)

Nem toda curva é uma reta. E a curva do voo de um míssil não é, *enfaticamente* reta, é uma parábola. Exatamente como o círculo de Arquimedes, ela parece uma quando vista de perto, e é por isso que a regressão linear faz um bom serviço dizend

onde o míssil estará cinco segundos depois que você o rastreou da última vez. Mas e hora depois? Esqueça. Seu modelo diz que o míssil está na baixa estratosfera, quan verdade está chegando perto da sua casa.

A advertência mais vívida que eu conheço contra a extrapolação linear impensad foi proferida por um estatístico, mas por Mark Twain, *Vida no Mississippi*:

> O Mississippi entre Cairo e Nova Orleans tinha 1.960 quilômetros de comprimento 176 anos atrás. Passou a te após o corte de 1722. Tinha 1.670 após o corte American Bend. Desde então perdeu 123 quilô Consequentemente, seu comprimento é de apenas 1.547 quilômetros no presente. … No espaço de 176 anos, Mississippi encolheu 399 quilômetros. É uma média insignificante de mais de 2 quilômetros por ano. Portanto, q pessoa calma, que não seja cega ou idiota, pode ver que, no período oolítico siluriano, pouco mais de 1 milhão atrás, em novembro próximo, o baixo rio Mississippi tinha mais de 2 milhões de quilômetros de compr estendendo-se sobre o golfo do México como uma vara de pescar. Do mesmo modo, qualquer pessoa pode daqui a 742 anos o baixo Mississippi terá apenas 2 quilômetros de comprimento, e Cairo e Nova Orleans terão j suas ruas e estarão labutando confortavelmente juntas sob um único prefeito e um conselho mútuo de anciãos. de fascinante na ciência. Obtemos tais retornos de conjectura por atacado a partir de uma ninharia de investim fato.

## Aparte: como tirar uma nota parcial no meu exame de cálculo

Os métodos do cálculo muito se assemelham à regressão linear, são puramente mecâ sua calculadora pode executá-los, e é muito perigoso usá-los sem a devida atenção. exame de cálculo você poderia ser solicitado a estimar o peso da água restante num depois de fazer um furo nele e deixar um fluxo de água escorrer durante algum temp blá-blá. É fácil cometer erros de aritmética quando se resolve um problema desse pressão. E às vezes isso faz com que o aluno chegue a um resultado ridículo, com exemplo, um jarro de água cujo peso é de –4 gramas.

Se um aluno chega a –4 gramas e escreve, às pressas, com letra desesperada, "Fiz besteira em algum lugar, mas não consigo achar meu erro", eu lhe dou metade da nota

Se ele simplesmente escreve "–4 gramas" no pé da página e faz um círculo em vo aluno leva zero – mesmo que toda a derivação esteja correta, com exceção de um dígito errado em algum lugar na metade da página.

Trabalhar uma integral ou executar uma regressão linear é algo que o computador fazer com bastante eficiência. Compreender se o resultado faz sentido – ou, em pri lugar, decidir se é o método correto a se usar – requer a mão humana para guiá-lo. Qu ensinamos matemática, presume-se que estejamos explicando como ser esse guia. Um de matemática que fracassa nisso essencialmente treina o aluno para ser uma versão lenta e infectada do Microsoft Excel.

Sejamos francos, na verdade, é isso que muitos dos nossos cursos de matemática fazendo. Para resumir uma história longa e controvertida (e ainda assim mante controvertida), o ensino de matemática para crianças já há décadas tem sido aren chamadas guerras da matemática. De um lado, há os professores que favorecem a ênfa memorização, fluência, algoritmos tradicionais e respostas exatas; de outro, professor acreditam que o ensino da matemática deveria tratar de apreensão do significado, dese

abordagem é chamada *tradicional*, e a segunda, *reforma*, embora a abordagem da desco supostamente não tradicional já esteja por aí há décadas. Saber se "reforma" realmente como reforma é o tema em debate. Um debate *feroz*. Num jantar de matemáticos, é ace tratar de temas como política ou religião, mas comece uma discussão sobre pedago matemática, e ela provavelmente acabará com alguém explodindo num acesso de tradicionalista ou reformista.

Eu não me incluo em nenhum dos dois campos. Não consigo aturar os reformista querem jogar fora a memorização da tabuada de multiplicação. Quando se está pens seriamente em matemática, algumas vezes é necessário multiplicar 6 por 8, e se você de recorrer à sua calculadora toda vez que fizer isso, jamais conseguirá o tipo de fluxo n que o raciocínio efetivo exige. Você não pode escrever um soneto se tiver de procurar se escreve cada palavra.

Alguns reformistas vão a ponto de dizer que os algoritmos clássicos (como "som números de vários dígitos pondo um em cima do outro, e 'subindo 1', quando necess deveriam ser banidos da sala de aula, uma vez que interferem no processo do alu descobrir sozinho as propriedades dos objetos matemáticos.[c]

Essa me parece uma ideia terrível. Esses algoritmos são ferramentas úteis que as pe trabalharam muito para criar, e não há razão para recomeçar tudo do zero.

Por outro lado, há algoritmos que eu julgo poderem ser descartados com seguran mundo moderno. Não precisamos ensinar aos alunos como extrair raízes quadradas à ou de cabeça (embora esta última habilidade, posso dizer por experiência própria, cor um belo truque a ser mostrado numa festa em círculos de nerds). Calculadoras també ferramentas que as pessoas trabalharam arduamente para construir – devemos us também, quando a situação exigir! Eu pouco me importo se meus alunos sabem divid por 12 usando a conta de divisão, mas me importo, *sim*, se o sentido numérico d suficientemente desenvolvido para estimar de cabeça que a resposta é um pouco mais

O perigo de superenfatizar algoritmos e cálculos precisos é que os algoritmos e os cál precisos são fáceis de avaliar. Se nos instalarmos numa visão da matemática que co em "obter a resposta certa" e nada mais, e elaboramos testes para isso, corremos o ris criar alunos que se saiam muito bem nos testes, mas que não saibam absolutamente de matemática. Isso pode ser satisfatório para aqueles cujos incentivos são guiados ú exclusivamente pelos resultados dos testes, mas não é satisfatório para mim.

Claro que não é melhor (na verdade, é substancialmente pior) passar no meio de população de alunos que desenvolveu algum tênue sentido de significado matemático não consegue resolver exemplos de forma rápida e correta. Uma das piores coisas qu professor de matemática pode ouvir de um aluno é "Captei o conceito, mas não con resolver os problemas". Embora o aluno não saiba, isso é equivalente a "Não cap conceito". As ideias da matemática soam abstratas, mas fazem sentido apenas em refe a cálculos concreto. William Carlos Williams afirma categoricamente: *nada de ideias, ser nas coisas*.

Em nenhum lugar a batalha é definida mais cruamente que na geometria plana. Es último reduto do ensino de provas, o alicerce da prática matemática. Ela é considerada

não está claro em que medida estamos de fato ensinando a beleza, o poder e a surpre prova quando ensinamos geometria. É fácil o curso se tornar um exercício de repetiçã árido quanto uma lista de trinta integrais definidas. A situação é tão horripilante que l Mumford, ganhador da Medalha Fields,[d] sugeriu que poderíamos dispensar totalme geometria plana e substituí-la por um curso inicial de programação. Um progran computador, afinal, tem muito em comum com uma prova geométrica: ambos exigen o aluno junte diversos componentes muito simples de uma pequena sacola de opçõe depois do outro, de modo que a sequência como um todo realize alguma tarefa signific

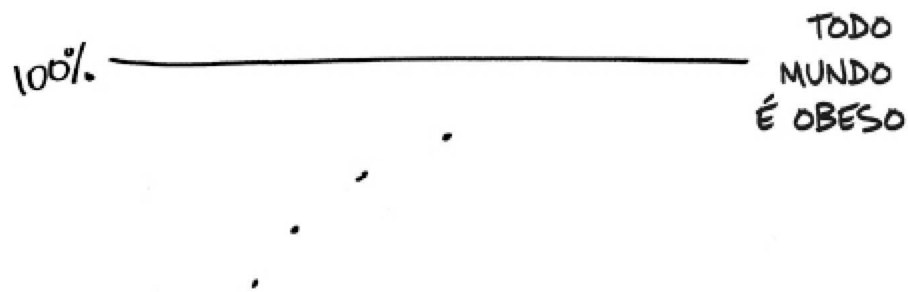
Eu não sou tão radical assim. Na verdade, não sou nada radical. Por mais insatisfa que seja para os adeptos da guerrilha, acho que devemos ensinar uma matemátic valorize respostas precisas, mas também aproximações inteligentes; que exija a habil de empregar algoritmos existentes com fluência, mas também o senso instintivo de desc sozinho; que misture rigidez e um sentido lúdico. Se não, não estaremos absolutan ensinando matemática.

Essa é uma condição exigente – contudo, de qualquer maneira, é o que os mel professores de matemática estão fazendo, enquanto as guerras da matemática são tra pelos administradores no escalão superior.

## De volta ao apocalipse da obesidade

Então, que porcentagem de americanos estará acima do peso em 2048? A esta altura v pode adivinhar como Youfa Wang e seus coautores na *Obesity* geraram sua projeç Estudo Nacional de Exame sobre Saúde e Nutrição (Nhanes, de National Healtl Nutrition Examination Study) acompanha os dados de saúde de uma grande e represen amostra de americanos, cobrindo tudo, desde perda de audição até infecções sexualn transmissíveis. Em particular, fornece dados muito bons para a proporção de ameri que estão acima do peso, o que, para os presentes propósitos, é definido como um índ massa corporal (IMC) de 25 ou mais.[e] Não há dúvida de que o predomínio do sobr aumentou nas últimas décadas. No começo dos anos 1970, pouco menos da metad americanos tinham IMC tão alto. No começo dos anos 1990, esse número tinha aume para quase 60%, e em 2008 quase ¾ da população dos Estados Unidos estavam acir peso.

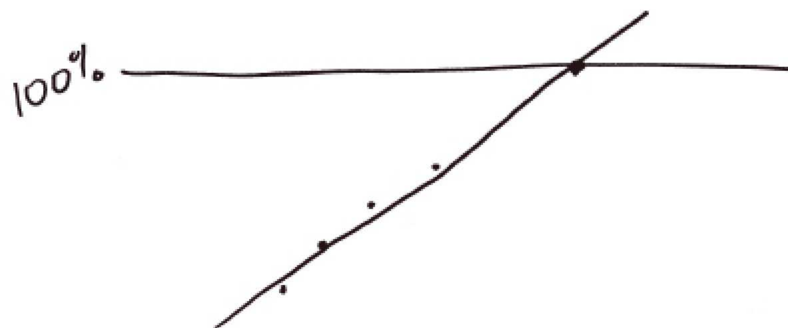
É possível registrar num gráfico a obesidade em relação ao tempo como fizemos c progresso vertical do míssil.

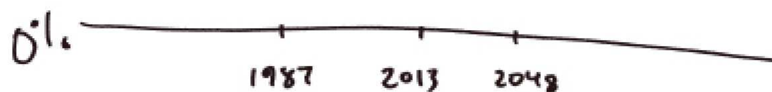






É possível gerar uma regressão linear, que terá mais ou menos o seguinte aspecto:




Em 2048, a reta cruza 100%. E é por isso que Wang escreve que todos os ameri estarão acima do peso em 2048, se a tendência atual continuar.

Mas a tendência atual não vai continuar. Não pode! Se continuasse, em 2060 atord 109% dos americanos estariam acima do peso.

Na realidade, o gráfico de uma proporção crescente se curva perto dos 100% da seg maneira:

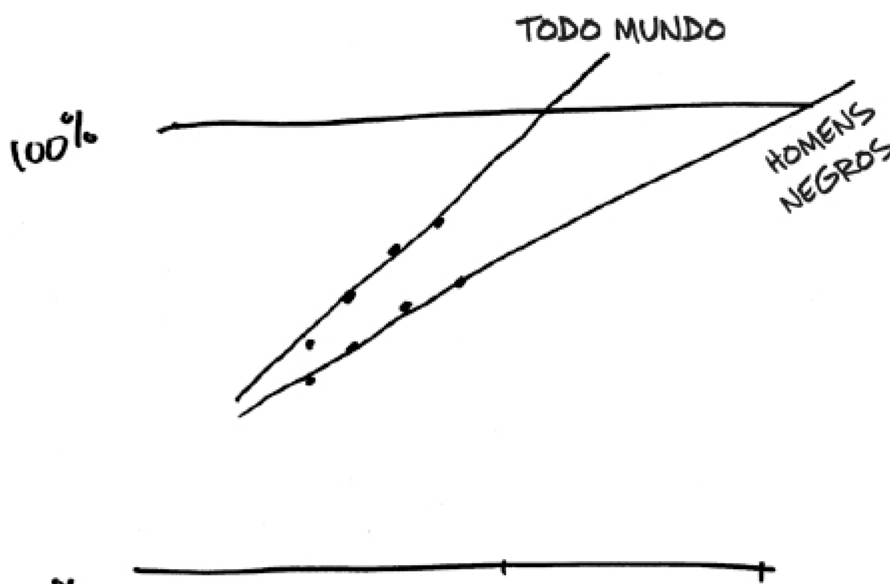






Essa não é uma lei férrea, como a gravidade que curva a trajetória do míssil : parábola, mas é o mais próximo que se pode obter em medicina. Quanto maior a prop de gente acima do peso, menos magricelas esqueléticos restam para converter, e lentamente a proporção aumenta em direção aos 100%. Na verdade, a curva provaveli se torna horizontal em algum ponto abaixo de 100%. Sempre haverá magros entre nó fato, apenas quatro anos depois, o levantamento do Nhanes mostrou que a escala‹ predomínio do sobrepeso já havia começado a desacelerar.[6]

Mas o artigo sobre a *Obesity* oculta o pior crime contra a matemática e o senso coı A regressão linear é fácil de se fazer – uma vez que se fez uma, as outras são tranç Então Wang e companhia dividiram seus dados segundo grupos étnicos e sexo. Ho negros, por exemplo, tinham menos propensão a estar acima do peso que o amer médio, e, mais importante, sua taxa de sobrepeso crescia apenas com metade da veloci Se sobrepusermos a proporção de homens negros acima do peso sobre a proporção ; de americanos acima do peso, junto com a regressão linear que Wang e companhia ‹ raram, temos uma figura com o seguinte aspecto:



Belo trabalho, homens negros! Vocês todos só estarão acima do peso em 2095. Em
só 80% de vocês estarão obesos.

Está vendo o problema? Se *todos* os americanos supostamente estarão acima do pe
2048, onde deverão estar aqueles 1 em 5 futuros homens negros sem problema de pes
exterior?

A contradição básica passa sem ser mencionada no artigo. É o equivalente epidemiol
a dizer que restam −4 gramas de água no balde. Nota zero.

---

[a] Mais detalhes sobre esses estudos podem ser encontrados na *Revista de coisas totalmente inventadas por mim para o meu ponto de vista.*

[b] "Mais se aproxima", nesse contexto, é medido da seguinte maneira: se você substituir a anuidade real em cada esc estimativa sugerida pela reta, e então computar a diferença entre a anuidade real e a estimada para cada escola, e a ao quadrado cada um desses números e somar todos esses quadrados, você obterá uma espécie de medida total de a reta está desviada em relação aos pontos, e você escolhe a reta que torna essa medida a menor possível. Esse neg soma de quadrados cheira a Pitágoras, e, de fato, a geometria subjacente à regressão linear nada mais é que o teor Pitágoras transposto e alçado a um contexto dimensional muito mais elevado, mas essa história requer mais álg que desejo apresentar aqui. No entanto, veja a discussão de correlação e trigonometria no Capítulo 15 para sa pouquinho mais nessa área.

[c] Lembra um pouquinho o conto de Orson Scott Card, "Unaccompanied sonata", que trata de um prodígio cuidadosamente mantido isolado e ignorante de qualquer outra música do mundo para que sua originalidade r comprometida. Mas aí um sujeito se infiltra e toca um pouco de Bach para ele, e é claro que a polícia da mús sabendo do que aconteceu, e o prodígio acaba banido da música. Acho que mais tarde suas mãos são cortadas cegado, ou algo assim, porque Orson Scott Card tem entranhada em si essa coisa esquisita de punição e mortific carne, mas, de todo modo, a questão é: não tente impedir músicos jovens de ouvir Bach, porque Bach é grande.

[d] A Medalha Fields, junto com o Prêmio Abel, é considerada o prêmio internacional máximo no campo da mate uma vez que não existe o Nobel de Matemática. (N.T.)

[e] Na bibliografia de pesquisa, "acima do peso" significa "IMC de pelo menos 25, porém menos que 30," e "obeso" s "IMC de 30 ou mais"; porém, vou me referir a ambos os grupos em conjunto como "acima do peso" para evitar a ob de digitar "acima do peso ou obeso" dezenas de vezes.

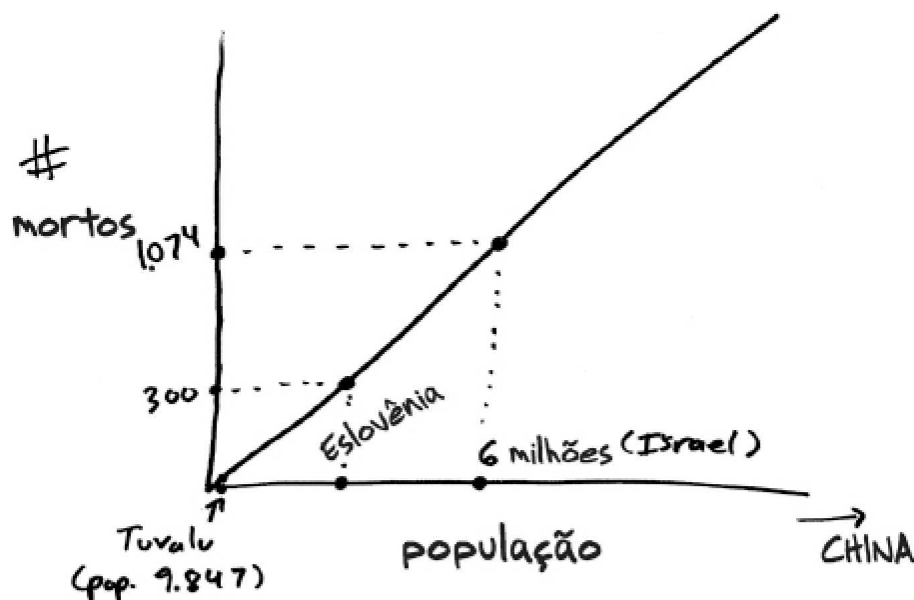
# 4. Quanto é isso em termos de americanos mortos?

QUAL A GRAVIDADE do conflito no Oriente Médio? O especialista em contraterrorismo D
Byman, da Universidade de Georgetown, apresenta os números árduos, frios, na r
*Foreign Affairs*: "Os relatórios militares israelenses reportam que, do começo da seg
intifada (2000) até o fim de outubro de 2005, os palestinos mataram 1.074 e feriram
israelenses – números impressionantes para um país tão pequeno, o equivalente proporc
a mais de 50 mil mortos e 300 mil feridos para os Estados Unidos."[1] Esse tipo de cálcul
se tornado lugar-comum em debates sobre a região. Em dezembro de 2001, a Câmar
Representantes dos Estados Unidos declarou que as 26 pessoas assassinadas por uma
de ataques em Israel eram "equivalentes, em base proporcional, a 1.200 mortes americ
[2] E Newt Gingrich,[3] em 2006: "Lembrem-se de que quando Israel perde oito pessoa
causa da diferença em população, isso equivale a perder quase quinhentos america
Para não ficar atrás, Ahmed Moor escreveu no *Los Angeles Times*: "Quando Israel r
1.400 palestinos em Gaza – proporcionalmente equivalentes a 300 mil americanos
Operação Chumbo Fundido, o recém-eleito presidente Obama permaneceu calado."[5]

A retórica da proporção não é privilégio da Terra Santa. Em 1988, Gerald Caplan esc
no *Toronto Star:* "Cerca de 45 mil nicaraguenses, em ambos os lados do conflito, f
mortos, feridos ou sequestrados nos últimos oito anos; em perspectiva, isso é equival
300 mil canadenses ou 3 milhões de americanos."[6] Robert McNamara, o secretário de D
na época da Guerra do Vietnã, disse em 1997 que os cerca de 4 milhões de mortes vietna
durante a guerra eram "equivalentes a 27 milhões de americanos".[7] Em qualquer mor
em que muita gente de um país pequeno tenha um fim trágico, os editorialistas pegan
réguas de cálculo e começam a computar quanto é isso em termos de americanos mo

Eis como esses números são gerados. Os 1.074 israelenses mortos por terro
correspondem a cerca de 0,015% da população israelense (que entre 2000 e 2005 e
cerca de 6 a 7 milhões). Então os estudiosos estimam que a morte de 0,015% da popu
muito maior dos Estados Unidos, que chega a cerca de 50 mil, teria aproximadame
mesmo impacto aqui.

Isso é lineocentrismo em sua forma mais pura. Segundo o argumento da proporção
pode achar o equivalente a 1.074 israelenses em qualquer lugar do globo com o grá
seguir:




As 1.074 vítimas israelenses equivalem a 7.700 espanhóis ou 223 mil chineses somente a trezentos eslovenos, um ou dois tuvaluanos.

Finalmente (ou talvez imediatamente?) o raciocínio começa a ruir. Quando há homens num fim de noite num bar, e um deles derruba o outro com um soco, iss equivale, em termos contextualizados, a 150 milhões de americanos levarem simult mente um soco na cara.

Quando 11% da população de Ruanda foi aniquilada, em 1994, todos concordar esse estava entre os piores crimes do século. Mas não descrevemos a carnificina lá diz "No contexto da Europa de 1940, foi nove vezes pior que o Holocausto." Fazer isso provo justificadamente, forte clamor de indignação.

Uma regra importante de higiene matemática: quando você está testando em camp método matemático, tente computar a mesma coisa de várias maneiras diferentes. Se obtiver respostas diferentes, há algo de errado em seu método.

Por exemplo, os atentados a bomba de 2004, na estação ferroviária de Atocha, em M mataram quase duzentas pessoas. Qual seria o atentado equivalente na Grand C Station, em Nova York?

Os Estados Unidos têm quase sete vezes a população da Espanha. Então, se você p em duzentas pessoas como 0,0004% da população espanhola, descobrirá que um a equivalente teria matado 1.300 pessoas nos Estados Unidos. Por outro lado, duzentas pe é 0,006% da população de Madri; fazendo a escala correspondente para Nova York, duas vezes e meia maior, você obtém 463 vítimas. Ou deveríamos comparar a provín Madri com o estado de Nova York? Isso lhe dá algo mais perto de seiscentos. Essa mu cidade de conclusões deve servir de alerta. Há algo de suspeito no método das propor

Não se pode, claro, rejeitar totalmente as proporções. Elas têm sua importância! Se quer saber que partes dos Estados Unidos têm o maior problema de câncer no cérebr faz muito sentido olhar os estados com a maioria de mortes de câncer cerebral, qu Califórnia, Texas, Nova York e Flórida, com a maioria dos casos de câncer no cérebro p são os mais populosos.[8] Steven Pinker apresenta questão semelhante em seu mais re

regularmente menos violento ao longo da história da humanidade. O século XX tei reputação pelos vastos números de pessoas presas nas engrenagens da política de p Mas nazistas, soviéticos, o Partido Comunista da China e os senhores coloniais não f realmente carniceiros efetivos em base proporcional, argumenta Pinker. É que simplesn há tanta gente para matar hoje! Atualmente não derramamos muitas lágrimas por mat antigas como a Guerra dos Trinta Anos. Mas esse conflito teve lugar num mundo men pela estimativa de Pinker, matou uma em cada cem pessoas sobre a Terra. Fazer isso significaria aniquilar 70 milhões de pessoas, mas que a quantidade de pessoas morta duas guerras mundiais juntas.

Então, é melhor estudar os índices de mortes em proporção à população tota exemplo, em vez de contar "números brutos" de mortes por câncer cerebral segui estado, podemos computar a proporção da população de cada estado que morre anualı de câncer no cérebro. Isso compõe um quadro muito diferente. Dakota do Sul gai indesejável primeiro prêmio, com 5,7 mortes de câncer cerebral por ano por 10 habitantes, bem acima do índice nacional de 3,4. Dakota do Sul é seguido na list Nebraska, Alasca e Maine. Parece que estes são os lugares a serem evitados se você não ter um câncer no cérebro. Então, para onde você deve se mudar? Percorrendo a lis embaixo, encontramos Wyoming, Vermont, Dakota do Norte, Havaí e o distrito de Co bia.

Agora, isso é estranho. Por que em Dakota do Sul o câncer no cérebro é tão fundam e Dakota do Norte está quase livre da doença? Por que você haveria de estar segui Vermont, mas correndo risco no Maine?

Resposta: Dakota do Sul não está necessariamente causando câncer no cérebro, e D do Norte não está necessariamente prevenindo a doença. Os cinco estados no topo da têm algo em comum, e os cinco estados na base da lista também têm. E é a *mesma* coi muito pouca gente morando lá. Dos nove estados (e um distrito) que se situam no alto topo da lista, o maior é Nebraska, que atualmente está empatado com Virgínia Ocid numa luta renhida para ser o 37º estado mais populoso. Morar num estado peq aparentemente, resulta em probabilidade muito maior e muito menor de ter cânc cérebro.[9]

Como isso não faz sentido, é melhor buscarmos outra explicação.

Para ver o que está acontecendo, vamos jogar um jogo imaginário. O jogo chan *quem é o melhor em cara ou coroa*. É bem simples. A gente lança um punhado de moe quem tirar mais caras ganha. Para deixar um pouco mais interessante, porém, nem mundo tem a mesma quantidade de moedas. Alguns – Time Pequeno – têm apena moedas, enquanto os membros do Time Grande recebem cem moedas.

Se formos fazer a contagem pelo número absoluto de moedas, uma coisa é praticam certa: o vencedor do jogo virá do Time Grande. O jogador Grande típico vai tirar cer cinquenta caras, número que ninguém dos Pequenos tem possibilidade de alcançar. M que o Time Pequeno tivesse cem membros, a contagem mais alta entre eles provavelı será em torno de oito ou nove.[a]

Isso não parece justo! De saída, o Time Grande tem uma vantagem maciça! Então, uma ideia melhor. Em vez de fazer a contagem pelo "número bruto", vamos conta proporções. Isso deverá pôr os dois times em situação mais justa.

Mas não põe. Como eu disse, se houver uma centena de Pequenos, pelo menos um tem probabilidade de tirar oito caras. Então a contagem dessa pessoa será no mínimo E os Grandes? Nenhum dos Grandes conseguirá obter 80% de caras. Isso é fisicar possível, claro. Mas não vai acontecer. Na verdade, você precisaria de mais ou me *bilhões* de jogadores no time Grande para ter uma chance razoável de ver um resultac distorcido. Isso deve se encaixar em sua intuição acerca de probabilidade. Quanto moedas você lança, maior sua probabilidade de estar perto de 50-50.

Você pode tentar sozinho! Eu tentei, e eis o que aconteceu. Lançando repetidamen moedas de cada vez para simular os jogadores Pequenos, tirei uma sequência de cara: o seguinte aspecto:

4, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 3, 4, 5, 5, 9, 3, 5, 7, 4, 5, 7, 7, 9 …

Com cem moedas, como os Grandes, tirei:

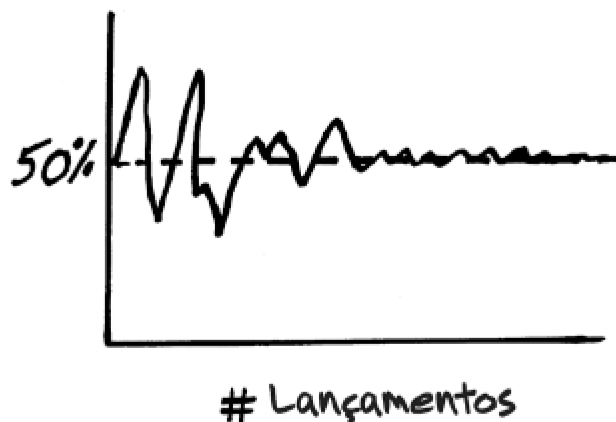
46, 54, 48, 45, 45, 52, 49, 47, 58, 40, 57, 46, 46, 51, 52, 51, 50, 60, 43, 45 …

E com mil:

486, 501, 489, 472, 537, 474, 508, 510, 478, 508, 493, 511, 489, 510, 530, 490, 503, 4 500, 594 …

Tudo bem, para ser honesto, não lancei mil moedas. Pedi a meu computado simulasse cara ou coroa. Quem tem tempo de lançar mil moedas?

Um sujeito que fez isso foi J.E. Kerrich, matemático da África do Sul que arriscou desaconselhável visita à Europa em 1939. Seu semestre no exterior logo se transfo numa detenção não programada em um campo de internamento na Dinamarca. N situação em que um prisioneiro com menos mentalidade estatística teria passado o t riscando os dias na parede de uma cela, Kerrich lançou a moeda 10 mil vezes ao t mantendo o registro do número de caras, enquanto prosseguia. Seus resultados tinh seguinte aspecto:




Como você pode ver, a fração de caras converge inexoravelmente para 50% à medid se lançam mais e mais moedas, como que espremida por uma máscara invisível. Você ver o mesmo efeito nas simulações. As proporções de caras no primeiro grupo de l mentos, os Pequenos, variam de 30% a 90%. Com cem lançamentos de cada vez, o inte se estreita: apenas de 40% a 60%. E com mil lançamentos, o intervalo das proporçõe apenas 46,2% a 53,7%. Algo está empurrando esses números para chegar cada vez perto de 50%. Esse algo é a fria e forte mão da lei dos grandes números. Não vou enu esse teorema com precisão (embora ele seja impressionantemente simpático!), mas pode pensar nele assim: quanto mais moedas você lançar, cada vez se torna mais ext gantemente improvável que você tire 80% de caras. Na verdade, se você lançar m suficientes, até a chance de obter 51% se torna mínima! Observar um resultado altar desequilibrado em dez lançamentos não tem nada de extraordinário; obter o mesmo quilíbrio proporcional em cem lançamentos seria tão surpreendente a ponto de vc perguntar se alguém não teria aprontado alguma trapaça com as moedas.

A compreensão de que os resultados de um experimento tendem a se assentar média fixa quando o experimento é repetido mais e mais vezes não é nova. Na verd quase tão velha quanto o estudo matemático da própria probabilidade; uma elabo informal desse princípio foi enunciada no século XVI por Girolamo Cardano; no en foi apenas na década de 1800 que Siméon-Denis Poisson surgiu com o vigoroso nome *des grands nombres* para descrevê-la.

## O chapéu do gendarme

No começo do século XVIII, Jakob Bernoulli havia elaborado um enunciado preciso e prova matemática da lei dos grandes números. Agora não se tratava mais de uma observ mas de um teorema.

O teorema nos diz que o jogo Grande-Pequeno não é limpo. A lei dos grandes núr sempre forçará a contagem dos jogadores Grandes para 50%, enquanto a contager Pequenos tem uma variação muito mais ampla. No entanto, seria loucura concluir Time Pequeno é "melhor" em tirar caras, mesmo que ele ganhe qualquer jogo. Se você a média de caras tiradas por *todos* os jogadores Pequenos, e não só daquele com cont

o jogador com menos caras, e não aquele com mais, o Time Pequeno de repente p ruim. É muito provável que um dos seus jogadores tenha apenas 20% de caras. Nenhu Grandes jamais terá resultado tão ruim. Fazer a contagem pelo "número bruto" de ca ao Time Grande uma insuperável vantagem. Mas usar a porcentagem deturpa o jo forma igualmente ruim em favor dos Pequenos. Quanto menor o número de moed que chamaríamos em estatística de *tamanho da amostra* –, maior a variação na prop de caras.

Esse é exatamente o mesmo efeito que torna as pesquisas políticas de opinião n confiáveis quando se incluem menos eleitores. O mesmo vale também para o cânc cérebro. Estados pequenos têm tamanhos de amostras pequenos – são meros ba açoitados de um lado para outro pelos ventos da probabilidade, enquanto os estados gr são enormes carvalhos antigos que mal se dobram. A medição do número absolu mortes por câncer cerebral é distorcida para os estados grandes; mas medir os *índices* altos – ou os mais baixos! – põe os estados pequenos na liderança. É assim que Dak Sul pode ter um dos índices mais altos de morte por câncer cerebral, enquanto Dak Norte tem um dos menores. O motivo não é porque o monte Rushmore ou a loja Wall sejam tóxicos para o cérebro, mas porque populações menores têm, de forma ine variação maior.

Esse é um fato matemático que você já sabe, embora não saiba que sabe. Que melhor arremessador da NBA? Em um mês da temporada 2011-12, cinco jogadores est empatados com maior porcentagem de arremessos da liga: Armon Johnson, De Liggins, Ryan Reid, Hasheem Thabeet e Ronny Turiaf.

*Quem?*

Aí está a questão. Esses não foram os cinco melhores arremessadores da NBA. F pessoas que mal chegaram a jogar. Armon Johnson, por exemplo, apareceu em um jog Portland Trail Blazers. Fez um arremesso. A bola entrou. Os cinco caras daquela lista fi ao todo treze arremessos e acertaram todos. Amostras pequenas têm maior variação, o arremessador líder da NBA será sempre alguém que fez apenas um punhado de arrem e teve sorte toda vez. Você jamais diria que Armon Johnson foi melhor arremessador jogador com melhor ranking da lista e que jogou quase o tempo todo, Tyson Chandle Knicks, que converteu 141 de 202 arremessos no mesmo período.[b] (Qualquer dúvida q a este ponto pode ser resolvida olhando a temporada 2010-11 de Johnson, quanc converteu inabaláveis 45,5% dos arremessos de quadra.) É por isso que o quadro-padr liderança não mostra sujeitos como Armon Johnson. Em vez disso, a NBA restrin rankings a jogadores que atingiram certo tempo mínimo de jogo; de outro modo, qua joão-ninguém que atue em tempo parcial e com pequenos tamanhos de amostra dom a lista.

Mas nem todo sistema de ranqueamento tem a habilidade quantitativa de fazer conce à lei dos grandes números. O estado da Carolina do Norte, como muitos outros nes de prestação de contas educacional, instituiu programas de incentivo para escolas c saem bem em testes padronizados. Cada escola é avaliada com base na melhora méc

pontuação nos testes dos alunos de uma primavera para outra; as 25 melhores escol estado segundo esse critério recebem uma flâmula para pendurar no ginásio de espo o direito de se vangloriar para as cidades vizinhas.

Quem vence esse tipo de competição?[11] A vencedora de 1999, com 91,5 de "e composto de desempenho", foi a C.C. Wright Elementary, em North Wilkesboro. Essa e estava do lado pequeno, com 418 alunos num estado onde as escolas de ensino fundam têm em média quase quinhentas crianças. Não muito atrás ficaram Kingswood Eleme com um escore de 90,9, e Riverside Elementary, com 90,4. Kingswood tinha apena alunos, e a minúscula Riverside, na cidadezinha de Newland, nos Apalaches, tinha som 161.

Na verdade, as escolas pequenas em geral faturaram a medida da Carolina do Norte estudo de Thomas Kane e Douglas Staiger[12] descobriu que 28% das escolas menor estado participaram das 25 melhores em algum momento no intervalo de sete anos es dos; entre todas as escolas, apenas 7% chegaram a ganhar a flâmula no ginásio de espo

Parece que as escolas pequenas, onde os professores realmente conhecem os alu suas famílias e têm tempo de dar uma instrução individualizada, são melhores para aum os escores dos testes.

Mas talvez eu deva mencionar que o título do artigo de Kane e Staiger é, aqui tradu "A promessa e as armadilhas de usar medidas imprecisas de prestação de contas escol que escolas menores não mostraram qualquer tendência, em média, de ter escores si cativamente mais altos nos testes. E que as escolas contempladas com "equipes de ass cia" (leia-se: que ganharam uma reprimenda dos encarregados estaduais pelos baixos tados nos testes) *também* eram predominantemente escolas menores.

Em outras palavras, até onde sabemos, a Riverside Elementary não é uma das esco ponta na Carolina do Norte, não mais do que Armon Johnson é o melhor arremessad liga. A razão de escolas pequenas dominarem as 25 de cima não é porque escolas peq sejam melhores, mas porque elas têm uma variação maior nos escores de testes. A meninos-prodígios ou alguns vagabundos da 3ª série podem mudar radicalmente a m de uma escola pequena; numa escola grande, o efeito de alguns escores extremos sim mente será dissolvido na média maior, mal afetando o valor geral.

Sendo assim, como podemos saber que escola é melhor, ou que estado está mais prop ao câncer, se pegar as médias simples não dá certo? Se você é um executivo administ uma porção de equipes, como pode avaliar com exatidão os desempenhos quando os menores têm maior probabilidade de predominar tanto no alto quanto na base d ranking?

Infelizmente, não há uma resposta fácil. Se um estado minúsculo como Dakota d vivencia um surto de câncer cerebral, pode-se presumir que o pico deve-se em g medida ao acaso, e pode-se estimar que o índice de câncer cerebral no futuro tem pro lidade de estar mais perto da média nacional. É possível ver isso pegando algum ti média ponderada do índice de Dakota do Sul em relação ao índice nacional. Mas atribuir peso aos dois números? É um pouquinho de sorte, envolvendo boa dose de l técnica, da qual pouparei você aqui.[13]

Um fato relevante foi observado inicialmente por Abraham de Moivre, um dos prin a contribuir para a moderna teoria da probabilidade. O livro de De Moivre, *The Doctr Chances*, de 1756, foi um dos textos-chave sobre o assunto. (Mesmo então, a populari dos progressos matemáticos era uma atividade vigorosa. Edmond Hoyle, cuja autor em questões de jogos de cartas era tão grande que as pessoas ainda usam a frase "seg Hoyle", escreveu um livro para auxiliar os jogadores a dominar a nova teoria – o chamava-se *An Essay Towards Making the Doctrine of Chances Easy to Those who Under Vulgar Arithmetic Only, to Which Is Added Some Useful Tables on Annuities*.)

De Moivre não estava satisfeito com a lei dos grandes números, segundo a qual, a prazo, a proporção de caras numa sequência de lançamentos chega cada vez mais per 50%. Ele queria saber *quanto* mais perto. Para entender o que ele descobriu, voltemos uma olhada naquela contagem de lançamentos. Mas agora, em vez de listar o númerc de caras, vamos registrar a *diferença* entre o número de caras realmente lançadas e o nú de caras que seria de esperar, 50% dos lançamentos. Em outras palavras, estaremos me quão afastados estamos da paridade perfeita entre cara e coroa.

Para os lançamentos de dez moedas, temos:

1, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 4, 2, 0, 2, 1, 0, 2, 2, 4 …

Para os lançamentos de cem moedas:

4, 4, 2, 5, 2, 1, 3, 8, 10, 7, 4, 4, 1, 2, 1, 0, 10, 7, 5 …

Para os lançamentos de mil moedas:

14, 1, 11, 28, 37, 26, 8, 10, 22, 8, 7, 11, 11, 10, 30, 10, 3, 38, 0, 6 …

Você pode ver que as discrepâncias em relação a 50-50 ficam maiores em termos abso à medida que a quantidade de lançamentos cresce, ainda que (como exige a lei dos gr números) estejam ficando cada vez menores em relação à quantidade de lançament insight de De Moivre é que o tamanho da discrepância típica[c] é governado pela *raiz qua* da quantidade de lançamentos que você faz. Lance uma moeda cem vezes como ante discrepância típica cresce num fator de 10 – pelo menos em termos absolutos. ( proporção do número total de lançamentos, a discrepância *encolhe* à medida que o nú de moedas aumenta, porque a raiz quadrada do número de moedas cresce muito lentamente que o número de moedas em si. Os lançamentos de mil moedas às vezes e uma distribuição equitativa por até 38 caras; mas, como proporção do total de lançam isso está apenas 3,8% distante do 50-50.

A observação de De Moivre é a mesma que fica subjacente à computação do erro-p numa pesquisa de opinião política. Se você quer reduzir o erro pela metade, precisa pesc quatro vezes mais pessoas. E se quiser saber quanto você deve se impressionar com boa sequência de caras, pode perguntar quantas raízes quadradas ela está afastada dos

estava exatamente uma raiz quadrada distante dos 50-50. A raiz quadrada de 1.000 é ou menos 31; então, quando tirei 538 caras em mil lançamentos, consegui algo ainda surpreendente, mesmo que tenha tirado apenas 53,8% de caras no último caso e 6( caras no caso anterior.

Mas De Moivre não tinha acabado. Ele descobriu que as discrepâncias em relaç 50-50, a longo prazo, sempre tendem a formar uma perfeita curva de sino, ou, co chamamos no nosso ofício, uma distribuição normal. (O pioneiro da estatística Fı Ysidro Edgeworth propôs que a curva fosse chamada de *chapéu do gendarme*,[14] e eu pı dizer que lamento que o nome não tenha pegado.)

A curva do sino/chapéu do gendarme é alta no meio e muito achatada perto das bo o que quer dizer que, quanto mais longe a discrepância está de zero, menos provável E isso pode ser quantificado de modo preciso. Se você lança *n* moedas, a chance de a se desviando de 50% de caras no máximo pela raiz quadrada de *n* é de 95,45%. A quadrada de 1.000 é mais ou menos 31; de fato, dezoito em vinte dos nossos lançam grandes de mil moedas, ou 90%, ficaram dentro de 31 caras distantes de 500. continuasse jogando esse jogo, a fração de vezes que acabaria com algo entre 469 e 531 ficaria cada vez mais perto da cifra de 95,45%.[d]




Tem-se a sensação de que algo *faz* isso acontecer. De fato, o próprio De Moivre po sentido isso. Segundo muitos relatos, ele encarava as regularidades no comportamer lançamentos repetidos de uma moeda (ou qualquer outro experimento sujeito ao a como obra da própria mão de Deus, que transformava as irregularidades de curto pra moedas, dados e da vida humana em comportamento de longo prazo previsível, gover por leis imutáveis e fórmulas decifráveis.[15]

É perigoso sentir isso. Porque, se você acha que a mão transcendental de alguém – 
a Fortuna, Lakshmi, não importa – está forçando as moedas a dar cara na metade das 
você começa a acreditar na chamada lei das médias: cinco caras seguidas e a próxima 
com certeza deve dar coroa. Você tem três filhos homens, decerto uma filha vem d
Afinal, De Moivre não nos disse que resultados extremos, como quatro filhos ho
seguidos, são altamente improváveis? Ele disse, e são. Mas *se você já teve três filhos ho*
um quarto filho não é tão improvável assim. Na verdade, é tão provável quanto ter um
homem da primeira vez.

À primeira vista, isso parece estar em conflito com a lei dos grandes números, que de
estar forçando sua prole a se dividir meio a meio entre meninas e meninos.[e] Mas o co
é uma ilusão. É mais fácil ver o que está se passando com as moedas. Eu posso com
lançando e obter dez caras seguidas. O que acontece a seguir? Bem, uma coisa que po
acontecer é você começar a desconfiar de que há algo de estranho com a moeda. Voltar
a esse assunto na Parte II, mas por enquanto vamos assumir que a moeda é honesta. 
a lei exige que a proporção de caras deve se aproximar de 50% à medida que lanço a m
mais e mais vezes.

O senso comum sugere que, a essa altura, coroa deve ser ligeiramente mais provável
corrigir o desequilíbrio existente.

Mas o senso comum diz com muito mais insistência que a moeda não pode se lem
do que aconteceu nas primeiras dez vezes em que a lancei!

Não vou manter o suspense – o segundo senso comum está certo. A lei das média
tem um nome muito bom porque leis deveriam ser verdadeiras, e esta é falsa. Moeda
têm memória. Assim, a próxima moeda que você lançar tem 50-50 de chance de dar c
mesma que em qualquer outro lançamento. A proporção geral vai se assentando em
não porque o destino favorece as coroas para compensar as caras que já saíram; não p
esses primeiros dez lançamentos se tornam cada vez menos importantes à medida que
lançar outras moedas. Se eu lanço uma moeda mais mil vezes, e obtenho cara cer
metade das vezes, a proporção de caras nos primeiros 1.010 lançamentos também será
de 50%. É *assim* que funciona a lei dos grandes números, não compensando o q
aconteceu, mas diluindo o que já aconteceu com dados novos, até que o passado se
desprezível proporcionalmente que pode ser esquecido.

## Sobreviventes

O que se aplica a moedas e contagens de testes vale também para massacres e genoc
Se você avalia o massacre pela proporção relativa à população nacional eliminada, os 
crimes tenderão a se concentrar nos países menores. Matthew White, autor do recon
damente mórbido *Great Big Book of Horrible Things*, classificou as matanças do sécul
e descobriu que as três maiores foram o massacre dos hererós, na Namíbia, pelos colo
dores alemães, a chacina de cambojanos por Pol Pot e a guerra do rei Leopoldo no Co
Hitler, Stálin, Mao e as grandes populações que dizimaram não entram na lista.

Esse desvio para as nações menos populosas apresenta um problema – onde está regra matematicamente certificada para calcular com precisão quanta dor experim quando lemos sobre as mortes de pessoas em Israel, Palestina, Nicarágua ou Espanha

Eis uma regra prática que para mim faz sentido: se a magnitude de um desastre grande que parece correto falar de "sobreviventes", então tem sentido mensurar o sacı da morte como proporção da população total. Quando você fala de um sobreviven genocídio em Ruanda, poderia estar falando de qualquer tutsi que vive em Ruanda; faz sentido dizer que o genocídio aniquilou 75% da população tutsi. E estaria justificac dizer que uma catástrofe que matou 75% da população da Suíça é o "equivalente suíç que sucedeu com os tutsis.

Mas seria absurdo chamar alguém de Seattle de "sobrevivente" do ataque ao World Center. Então, provavelmente não é útil pensar nas mortes do World Trade Center uma proporção de todos os americanos. Apenas um em 100 mil americanos, ou 0,( morreu no World Trade Center naquele dia. Esse número está muito próximo de zerc sua intuição conseguir captá-lo. Você não tem a sensação do que significa essa propc Então é arriscado dizer que o equivalente suíço dos ataques ao World Trade Center um assassinato em massa de 0,001% de suíços, ou oitenta pessoas.

Então, como devemos classificar essas atrocidades, se não for pelos números absolı pela proporção? Algumas comparações são claras. O genocídio em Ruanda foi pior 11 de Setembro, e o 11 de Setembro foi pior que o massacre de Columbine, e Columbi pior que uma pessoa morta num acidente provocado por um motorista bêbado. C mortes, separadas por vastas diferenças no tempo e no espaço, são mais difíceis de com Teria sido a Guerra dos Trinta Anos realmente mais letal que a Primeira Guerra Muı Como se compara o genocídio terrivelmente rápido de Ruanda com a longa e brutal g entre o Irã e o Iraque?

A maioria dos matemáticos diria que, no final, os desastres e atrocidades da hi formam o que chamamos de conjunto parcialmente ordenado. Essa é uma maneira d çada de dizer que alguns pares de desastres podem ser significativamente compaı outros não. Não porque não tenhamos uma contagem de mortos exata o bastant opiniões firmes quanto aos méritos relativos de ser aniquilado por uma bomba v morrer de fome induzida pela guerra. Mas porque a questão de uma guerra ser pic outra é fundamentalmente diferente do problema de um número ser maior que outrc último sempre tem uma resposta. A primeira, não. E se você quer avaliar o significa 26 pessoas mortas por atentados terroristas, não imagine 26 pessoas mortas por aten terroristas do outro lado do mundo, mas na sua própria cidade. Esse cálculo é maten e moralmente irretocável, e não se faz necessário nenhuma calculadora.

---

[a] Não vou fazer esses cálculos, mas se você quiser conferir meu trabalho, o termo-chave é "teorema binomial".

[b] A porcentagem de arremessos é função tanto dos arremessos que você escolhe fazer quanto de sua habilidade int de acertar a cesta (Kirk Goldsberry, "Extra points: a new way to understand the NBA's best scorers", *Grantland*, 9 oı disponível em: www.grantland.com/story/_/id/9795591/kirk-goldsberry-introduces-new-way-understand-nb scorers; acesso em 13 jan 2014. Ele sugere uma maneira de ir além das porcentagens de arremessos para dese

[c] Os especialistas perceberão que estou evitando cuidadosamente a expressão "desvio padrão". Os não especialis queiram se aprofundar devem consultar o termo.

[d] Para ser preciso, é um pouco menos, mais para 95,37%, uma vez que 31 não é *bem* a raiz quadrada de 1.000, r pouco menor.

[e] Na realidade, mais perto de 51,5% meninos e 48,5% meninas, mas quem está contando?

# 5. A pizza maior que o prato

Proporções podem ser enganosas mesmo em casos mais simples, aparentemente n
ambíguos.

Um recente texto de trabalho dos economistas Michael Spence e Sandile Hlatsh
pintou um retrato surpreendente do crescimento de emprego nos Estados Unidos. É
cional e agradável pensar no país como um colosso industrial, cujas fábricas op
furiosamente noite e dia, produzindo os bens que o mundo exige. A realidade contempo
é bem diferente. Entre 1990 e 2008, a economia americana apresentou um aumento d
milhões de empregos. Destes, 26,7 milhões, ou 98%, vinham do "setor não comercializ
a parte da economia que inclui coisas como governo, saúde, varejo e serviços de alimen
que não podem ser terceirizados para o exterior e não produzem bens a serem despac
para outros países.

Esse número nos dá um poderoso relato sobre a recente história industrial americ
foi amplamente repetido, na *The Economist*[2] e até no último livro de Bill Clinton.[3] I
preciso ter cautela sobre seu significado. Noventa e oito por cento é realmente muito
de 100%. Isso significa que o estudo diz que o crescimento está tão concentrado no
não comercializável da economia quanto possível? É assim que soa, mas não está totalı
certo. Os empregos no setor comercializável cresceram meros 620 mil entre 1990 e 2
verdade. Mas poderia ter sido pior, eles poderiam ter diminuído! Foi o que ocorreu
2000 e 2008: o setor comercializável perdeu cerca de 3 milhões de empregos, enqua
setor não comercializável ganhou 7 milhões. Então, o setor não comercializável contı
com 7 milhões de empregos num ganho total de 4 milhões, ou 175%!

O slogan a ser seguido aqui é:

*Não fale em porcentagens de números quando os números podem ser negativos.*

Isso pode parecer excesso de cautela. Números negativos são números, e como tais p
ser multiplicados ou divididos como qualquer outro. No entanto, mesmo isso não
trivial quanto parece à primeira vista. Para nossos predecessores matemáticos, nem s
estava claro que números negativos fossem realmente números – afinal, eles não represe
quantidades exatamente da mesma maneira que os números positivos. Posso ter sete r
na mão, mas não sete não maçãs. Os grandes algebristas do século XVI, como Card
François Viète, argumentavam furiosamente para saber se um número negativo multipl
por um número negativo dava um número positivo, ou melhor, entendiam que a consist
parecia exigir que assim fosse, mas havia uma divisão real sobre se isso se era factu
apenas expediente de notação. Cardano, quando uma equação que estivesse estuc

Os argumentos dos matemáticos do Renascimento italiano podem às vezes parec recônditos e irrelevantes para nós quanto sua teologia. Mas eles não estavam errados q a haver algo na combinação de quantidades negativas e operações aritméticas co porcentagem capaz de provocar um curto-circuito na intuição. Quando você desobed slogan que lhe dei, começa a vir à tona toda sorte de incongruências esquisitas.

Por exemplo, digamos que eu dirija um bar. As pessoas, é triste dizer, não estão comp meu produto. No mês passado perdi US$ 500 nessa parte do negócio. Por sorte, inteligência de instalar uma seção de doces e salgados e um equipamento de CD clientes, e essas duas operações geraram um lucro de US$ 750 cada.

Ao todo, ganhei US$ 1 mil, e 75% dessa quantia provêm da seção de doces e sal Isso dá a impressão de que, neste momento, são eles que realmente fazem o ne funcionar; quase todo meu lucro vem dos croissants. Exceto que é igualmente correto que 75% do meu lucro vêm do equipamento de CD. E imagine se eu tivesse perdido US$ 1 mil no café – então meu lucro total seria zero, infinitos por cento dos quais v dos doces e salgados![a] "Setenta e cinco por cento" soa como se eu dissesse "quase tudo quando você está lidando com números que podem ser tanto positivos como nega como os lucros, isso significa algo bem diferente.

Esse problema nunca surge quando você estuda números que devem ser *positivos*, despesas, receitas ou populações. Se 75% dos americanos acham que Paul McCartne Beatle mais bacana, então não é possível que outros 75% digam que foi Ringo Star George[b] e John precisam dividir entre si os 25% restantes.

Você pode observar esse fenômeno também nos dados de empregos. Spence e Hlatsh poderiam ter ressaltado que cerca de 600 mil empregos foram criados em finanças e se isso é quase 100% do total de empregos criados pela totalidade do setor comerciali Não ressaltaram isso porque não estavam tentando iludir você de modo a acreditar qu havia nenhuma outra parte da economia crescendo durante esse intervalo de tempo. você deve se lembrar, houve pelo menos mais uma parte da economia dos Estados U que contribuiu bastante com empregos entre 1990 e hoje: o setor classificado como "d de sistemas de computadores e serviços correlacionados", que triplicou seu núme empregos, responsável, sozinho, por mais de 1 milhão deles. A quantidade total de emp adicionados por finanças e computadores esteve bem acima dos 620 mil adicionado setor comercializável como um todo; esses ganhos foram contrabalançados pelas gr perdas em manufatura. A combinação de positivo e negativo, se você não tiver cui permite contar uma história falsa, na qual todo o trabalho de criação de empregos no comercializável foi realizado pelo setor financeiro.

NÃO É POSSÍVEL fazer muitas objeções àquilo que Spence e Hlatshwayo escreveram. É ver o crescimento total de empregos num agregado de centenas de indústrias *pode* ser neg mas, num contexto econômico normal, durante um intervalo de tempo razoavel longo, é bem provável que seja positivo. Afinal, a população segue crescendo, e, na aus de desastre total, isso tende a arrastar consigo o número absoluto de empregos.

de empregos pelo então governador Scott Walker. Aquele havia sido mais um mês para a economia americana como um todo, que criou apenas 18 mil empregos em t país. Mas os números de empregos no estado pareciam muito melhores: um aumento lí de 9.500 empregos. "Hoje", dizia o informativo, "ficamos sabendo que mais de 50 crescimento de empregos nos Estados Unidos em junho está no nosso estado."[5] O tópi incorporado e distribuído por políticos GOP,[c] como o deputado Jim Sensenbrenne disse a sua audiência num subúrbio de Milwaukee: "O relatório sobre trabalho que sa semana passada tinha anêmicos 18 mil no país, mas metade deles veio aqui de Wisc Alguma coisa que fazemos aqui deve estar funcionando."[6]

Esse é um exemplo perfeito da enrascada em que você se mete quando começa a r porcentagens de números, como criação líquida de novos empregos, que podem ser pos ou negativos. Wisconsin adicionou 9.500 empregos, o que é bom; mas o estado vizin Minnesota, com o governador democrata Mark Dayton, adicionou mais de 13 mil no m mês.[7] Texas, Califórnia, Michigan e Massachusetts também superaram o aumento d pregos em Wisconsin. Este último estado teve um mês bom, é verdade, mas não contr com tantos empregos quanto todo o resto do país somado, como sugeria a mens republicana. Na verdade, o que acontecia era que as perdas de empregos em outros es contrabalançavam quase exatamente os empregos criados em locais como Wisconsin, sachusetts e Texas. Foi assim que o governador de Wisconsin pôde alegar que seu e havia contribuído com metade do crescimento de empregos. O governador de Minn se tivesse se incomodado em fazê-lo, poderia ter dito que seu próprio estado era respo por 70% desse crescimento. De modo tecnicamente correto, mas fundamentalmente noso, ambos estavam certos.

Você também pode pegar um recente editorial opinativo do *New York Times* escrit Steven Rattner,[8] que usou o trabalho dos economistas Thomas Piketty e Emmanuel para argumentar que a atual recuperação econômica está desigualmente distribuída os americanos:

> Novas estatísticas mostram uma divergência cada vez mais surpreendente[d] entre as fortunas dos ricos e o r população – e a desesperada necessidade de abordar esse doloroso problema. Mesmo num país que às vezes habituado à desigualdade de renda, essas informações são realmente estarrecedoras.
>
> Em 2010, enquanto o país continuava a se recobrar da recessão, estonteantes 93% da renda adicional criada naquele ano, em comparação com 2009 – US$ 288 bilhões –, foi para o 1% no topo da lista de contribuintes, com uma renda de pelo menos US$ 352 mil anuais. … Os outros 99% receberam um aumento microscópico 80 no pagamento por pessoa em 2010, depois de corrigida a inflação. O 1% do topo, cuja renda média é 1.019.089 por ano, teve um aumento de 11,6% em sua renda.

O artigo vem embalado com um charmoso infográfico que decompõe ainda m ganhos de renda: 37% para os membros ultrarricos do 0,01% do topo, com 56% para o do 1% do topo, deixando magros 7% para os 99% restantes da população. Você pode um pequeno diagrama do tipo pizza:




Agora vamos fatiar a pizza mais uma vez e perguntar sobre as pessoas que estão no superiores, mas não no 1% de cima. Aqui você encontra os médicos de família, advo que não são da elite, engenheiros e os administradores da classe média alta. Qual o tam da fatia deles? Você pode obter isso dos dados de Piketty e Saez, que prestativamen disponibilizaram na internet.[9] E descobre uma coisa curiosa: esse grupo de americano uma renda média de aproximadamente US$ 159 mil em 2009, que aumentou par pouquinho acima de US$ 161 mil em 2010. Esse é um ganho modesto comparado c que o percentil mais rico abocanhou, mas ainda assim contribui com 17% da renda ganha entre 2010 e 2011.

Tente encaixar uma fatia de 17% da pizza dentro dos 93% nas mãos do 1% mais r você terá uma pizza maior que o prato.

Os porcentuais 93% e 17% somam mais que 100%. Como isso faz sentido? Faz p os 90% de baixo tiveram uma renda média *mais baixa* em 2011 que em 2010, haven não recuperação. Números negativos na composição geram um comportamento vac nas porcentagens.

Olhando os dados de Piketty-Saez para diferentes anos, vê-se o mesmo p repetidamente. Em 1992, 131% dos ganhos de renda nacionais foram acumulados pe do topo! Essa é com certeza uma cifra impressionante, mas que indica que a porcent não significa exatamente aquilo a que você está acostumado. Não se pode enfiar 131% gráfico do tipo pizza. Entre 1982 e 1983, com outra recessão retrocedendo à memória dos ganhos de renda nacionais foram para o grupo superior de 10%, mas não de 1% que isso significa que a recuperação foi captada pelos profissionais razoavelmente deixando atrás a classe média e os muito ricos? Que nada. O 1% do topo viu um sau aumento também nesse ano, contribuindo sozinho com 63% do ganho de renda nac Agora, o que estava efetivamente ocorrendo era que os 90% de baixo continuavam a p terreno, enquanto a situação melhorava para o resto.

Nada disso tem intenção de negar que o amanhecer nos Estados Unidos chega um p mais cedo no dia dos americanos mais ricos do que para a classe média. Mas de fato fo um ângulo ligeiramente diferente da história. Não é que 1% esteja se beneficiando enq

inclui, para não entrar em excesso de detalhes, muitos leitores da página de opinião d
*York Times* –, também estão se dando bem, captando mais que o dobro da fatia de 7%
pizza parece lhes conceder. São os *outros* 90% do país que ainda não enxergam uma l
fim do túnel.

Mesmo quando os números envolvidos *são* positivos, há lugar para aqueles que qu torcer a história e dar uma versão enganosa acerca das porcentagens. Em abril de 2( campanha presidencial de Mitt Romney, enfrentando números fracos entre as mul emitiu um comunicado afirmando:[10] "A administração Obama trouxe tempos difícei as mulheres americanas. Sob o governo do presidente Obama, mais mulheres têm l para conseguir trabalho que em qualquer outro momento registrado da nossa histór mulheres constituem 92,3% de todos os empregos perdidos na administração Obama

Quanto ao modo de falar, essa afirmação é correta. Segundo o Escritório de Estatí do Trabalho, o emprego total em janeiro de 2009 era de 133.561.000 postos e em ma 2012, de apenas 132.821.000: uma perda líquida de 740 mil empregos. Entre as mulhe números eram de 66.122.000 e 65.439.000; então havia 683 mil mulheres a menos e gadas em março de 2012 que em janeiro de 2009, quando Obama assumiu o cargo. D o segundo número pelo primeiro, e você obtém a cifra de 92%. É quase como se o presi Obama andasse por aí mandando as empresas demitirem todas as mulheres.

Mas não. Esses números não são perdas de empregos *líquidas*. Não temos ideia de qu empregos foram criados e de quantos foram perdidos nesse período de três anos, sab apenas que a diferença entre esses dois números é de 740 mil. A perda de emprego lí às vezes é positiva, outras vezes negativa, e por isso que citar porcentagens é uma perigosa. Basta imaginar o que teria acontecido se a campanha de Romney começ contagem um mês depois, em fevereiro de 2009.[e] Nesse ponto, outro mês brutal de rec a totalidade de empregos tinha caído para 132.837.000. Entre esse mês e março de 2( economia sofreu uma perda bruta de apenas 16 mil empregos. Só entre as mulher empregos perdidos foram 484 mil (contrabalançados, claro, por um ganho correspon entre os homens). Que oportunidade perdida para a campanha de Romney – se tiv começado sua avaliação em fevereiro, o primeiro mês inteiro da presidência Obama, riam ter mostrado que as mulheres contribuíram com mais *3.000%* de todos os emp perdidos na era Obama!

Mas isso teria sinalizado para qualquer um, exceto para os eleitores menos informados, que a porcentagem de algum modo não era a medida correta.

O que realmente aconteceu com homens e mulheres na força de trabalho entre a de Obama e março de 2012? Duas coisas. Entre janeiro de 2009 e fevereiro de 2( emprego despencou tanto para homens quanto para mulheres, com a recessão e consequências cobrando o preço.

Janeiro 2009-fevereiro 2010:
Perda de empregos líquida para homens: 2.971.000
Perda de empregos líquida para mulheres: 1.546.000

E então, pós-recessão, o quadro de emprego começou a melhorar lentamente:

Ganho de empregos líquido para homens: 2.714.000
Ganho de empregos líquido para mulheres: 863.000

Durante o declínio agudo, os homens levaram o soco no queixo, sofrendo quase o ( de perdas de emprego que as mulheres. Na recuperação, os homens contam com 75¦ empregos ganhos. Quando se somam os dois períodos, as cifras masculinas por acaso se cancelam, deixando os homens com quase tantos empregos quanto no começo. I ideia de que o período econômico tem sido ruim quase que exclusivamente para as mul é muitíssimo errônea.

O *Washington Post* qualificou o cálculo da campanha de Romney de "verdadeira falsa".[11] Essa classificação provocou zombaria nos adeptos de Romney, mas eu a cons correta, e ela tem algo profundo a dizer sobre o uso de números na política. Não há d sobre a exatidão do número. Divide-se a perda líquida de empregos das mulheres pela líquida total e obtém-se 92,3%.

Mas isso torna a alegação "verdadeira" apenas num sentido muito fraco. É com campanha de Obama tivesse emitido um comunicado dizendo: "Mitt Romney nunca r alegações de que durante anos ele operou uma rede bicontinental de tráfico de cocaí Colômbia e em Salt Lake City."

Essa afirmativa também é 100% verdadeira! Mas destina-se a criar uma falsa impr Então "verdadeiro, mas falso" é uma avaliação bastante justa. É a resposta certa p pergunta errada, o que a torna pior, de certa maneira, que um simples erro de cálc fácil pensar na análise quantitativa de uma política como algo que se faz com a calcula Mas a calculadora só entra em cena depois que você determinou que cálculos deseja f

Eu ponho a culpa em problemas com as palavras. Elas dão uma impressão terrivel errada da relação entre matemática e realidade. "Bobby tem trezentas bolinhas de gud 30% delas a Jenny. E dá a Jimmy metade do que deu a Jenny. Com quantas bolinh ficou?" Isso *parece* o mundo real, mas é simplesmente um problema de aritmétic disfarce não muito convincente. O problema com as palavras nada tem a ver com bol de gude. Eu poderia simplesmente dizer: digite "$300 - (0{,}30 \times 300) - (0{,}30 \times 300)/2 =$" n calculadora e copie a resposta!

Mas as questões do mundo real não são como os problemas com as palavras problema do mundo real é algo como "Será que a recessão e suas consequências f especialmente ruins para as mulheres na força de trabalho; se foram, em que medida resultado das políticas da administração Obama?". Sua calculadora não tem uma tecla isso. Porque, para dar uma resposta sensata, você precisa saber mais que somente nún Qual o formato das curvas de perda de emprego para homens e mulheres numa rec típica? Terá sido esta recessão especialmente diferente sob esse aspecto? Que tip emprego são desproporcionalmente ocupados por mulheres, e quais foram as de tomadas por Obama que afetaram esse setor da economia? Só depois de começar a for essas perguntas é que você pega sua calculadora. Mas nesse ponto o verdadeiro tra mental já terminou. Dividir um número por outro é mera computação. Descobrir você deve dividir *pelo que* é matemática.

[a] Alerta de segurança: nunca divida por zero, a não ser que haja algum matemático formado no recinto.

[b] Na verdade, o Beatle mais bacana.

[c] GOP: Government, Politics & Diplomacy, também Gold Old Party, Bom e Velho Partido, apelido do Partido Repu desde 1880. (N.T.)

[d] Pedantismo matemático. Para alegar que algum fenômeno é "cada vez mais surpreendente", você precisa fazer m mostrar que ele é surpreendente; você precisa mostrar que sua "surpreendência" está *aumentando*. Esse tópic abordado no corpo do editorial opinativo.

[e] A análise aqui está em dívida com Glenn Kessler, que escreveu sobre o anúncio de Romney no *Washinton Post* 2012.

PARTE II

# Inferência

Inclui: mensagens ocultas na Torá; os perigos do espaço de manobr teste de significância da hipótese nula; B.F. Skinner vs. William Shakespeare; “Deleite Turbo Sexofônico”; a falta de jeito dos númer primos; torturar os dados até que eles confessem; a maneira certa d ensinar criacionismo em escolas públicas.

# 6. O corretor de ações de Baltimore e o código da Bíblia

As pessoas usam matemática para manipular problemas que variam desde o coti (“Quanto tempo devo esperar pelo próximo ônibus?”) até o cósmico (“Qual a aparên Universo três trilionésimos de segundo após o big bang?”).

Mas há um campo de questões bem além do cósmico, problemas sobre “o significa “a origem de tudo”, a respeito das quais você poderia achar que a matemática não tem a ponderar.

Nunca subestime a ambição territorial da matemática! Você quer saber sobre Deu matemáticos envolvidos no caso.

A ideia de que seres humanos terrenos possam aprender sobre o mundo divino por de observações racionais é muito antiga, tão antiga, segundo Maimônides, erudito jud século XII, quanto o próprio monoteísmo. A obra central de Maimônides, a *Mishneh T* dá o seguinte relato sobre a revelação de Abraão:

> Depois que Abraão foi desmamado,[1] mas ainda criança de colo, sua mente começou a refletir. De dia e de n pensava e se perguntava: “Como é possível que essa esfera [celeste] guie continuamente o mundo e não haja n para guiá-la e fazê-la girar; não é possível que ela gire por si mesma?” … Sua mente trabalhava e refletia ardu até que ele alcançou o caminho da verdade, apreendeu a linha correta de pensamento e soube que havia um De Ele guia a esfera celeste e que criou tudo, e, em meio a tudo que existe, não há deus outro além Dele. … Ele c então a proclamar ao mundo todo com grande energia e instruir as pessoas que o Universo inteiro tinha ape Criador e que a Ele era correto adorar. … Quando as pessoas acorreram a ele em grande quantidade, instruía um segundo sua capacidade, até que encontrasse o caminho da verdade, e assim, milhares e dezenas de n juntaram-se a ele.

Essa visão de crença religiosa é extremamente própria da mente matemática. acredita em Deus não porque foi tocado por um anjo, nem porque um dia seu coraç abriu e deixou o sol entrar, e decerto não por alguma coisa que seus pais lhe disseram porque Deus é uma coisa que *deve existir*, com a mesma segurança de que oito veze deve ser igual a seis vezes oito.

Atualmente, o argumento abraâmico – basta *olhar* para tudo, como tudo poderia s incrível se não houvesse um projetista por trás? – é considerado insuficiente, ao meno maioria dos círculos científicos. Mas agora temos microscópios, telescópios e computa Não estamos restritos a observar a Lua dos nossos berços. Temos dados, dados aos m e possuímos as ferramentas para brincar com eles.

O conjunto favorito de dados do erudito rabínico é a Torá, que, afinal, é uma cad personagens arranjados em sequência, extraídos de um alfabeto finito, que tentamos t mitir fielmente, sem erro, de sinagoga em sinagoga. Apesar de ter sido escrita em per

Quando um grupo de pesquisadores na Universidade Hebraica de Jerusalém come analisar esse sinal, em meados da década de 1990, descobriu algo muito estranh dependendo de sua perspectiva teológica, algo nada estranho. Os pesquisadores vinha diferentes disciplinas: Eliyahu Rips era professor sênior de matemática, conhecido te da teoria dos grupos; Yoav Rosenberg era estudante de pós-graduação em ciênc computação; e Doron Witztum, ex-estudante com mestrado em física. Mas todos co tilhavam um gosto pelo ramo do estudo da Torá que busca textos esotéricos ocultos s histórias, genealogias e advertências que compõem a superfície das Escrituras. Sua menta escolhida foi a "Sequência de Letras Equidistantes", doravante SLE, um peda texto obtido quando se juntam caracteres da Torá segundo intervalos regulares. Por exe na frase

LEMOS UMA NOTÍCIA ÓTIMA

você pode ler cada quinta letra, contando a partir da primeira, e obtém:

**L**EMOS **U**MA NO**T**ÍCIA **Ó**TIMA

A SLE seria LUTO. Se isso significa o lamento por alguém que morreu ou a dispo para uma batalha, será determinado pelo contexto.

A maioria das SLEs não gera palavras; se eu fizer a SLE a cada terceira letra na m frase, obtenho algo sem sentido como LOMOCOM, o que é mais comum. Ainda assim, a é um documento longo. Se você procurar padrões, vai encontrar.

Como modo de indagação religiosa, isso parece estranho. Será o Deus do Testamento realmente o tipo de divindade que sinaliza sua presença numa pesqui palavras? Na Torá, quando Deus quer que você saiba que Ele está lá, você *sabe* – mul de noventa anos que engravidam, arbustos que pegam fogo e falam, jantar que cai do

Ainda assim, Rips, Witztum e Rosenberg não foram os primeiros a procurar mens ocultas nas SLEs da Torá. Há alguns precedentes esporádicos entre os rabinos clássicos o real pioneiro do método no século XX foi Michael Dov Weissmandl, rabino da Eslov que passou a Segunda Guerra Mundial tentando, na maior parte do tempo em vão, lev dinheiro do Ocidente a fim de comprar alívio para os judeus da Eslováquia[2] de o alemães subornáveis. Weissmandl encontrou diversas SLEs interessantes na Torá. A famosa: ele observou que, a começar por um certo "mem" (a letra hebraica que soa "m") na Torá, e contando para a frente intervalos de cinquenta letras, achava-se a sequ "*mem shin nun hei*", as letras da palavra hebraica *Mishneh*, a primeira palavra do títu comentário da Torá escrito por Maimônides. Agora você salta 613 letras (por que na Porque é o número exato de mandamentos na Torá, por favor, tente acompanhar) e co a selecionar novamente cada quinquagésima letra. Você descobre que as letras fo *Torah* – em outras palavras, o título do livro de Maimônides está registrado em SL Torá, documento redigido mais de mil anos antes de seu nascimento.

Como eu disse, a Torá é um documento longo – segundo uma contagem, possui ac

acerca de padrões como esse encontrado por Weissmandl. Há montes de maneiras de e arranjar a Torá, e inevitavelmente algumas delas formarão palavras.

Witztum, Rips e Rosenberg, treinados em matemática bem como em rel propuseram-se uma tarefa mais sistemática. Escolheram 32 rabinos notáveis de toda a da história judaica moderna, de Avraham HaMalach a O Yaabez. Em hebraico, núı podem ser grafados em caracteres alfabéticos, de modo que as datas de nascimento e ı dos rabinos forneciam mais sequências de letras com que brincar. A pergunta é: os n dos rabinos aparecem em sequências de letras equidistantes inusitadamente próxim suas datas de nascimento e morte?

Ou, em tom mais provocativo: a Torá conhecia o futuro?

Witztum e seus colegas[3] testaram essa hipótese de um modo sagaz. Primeiro, pesquis o livro do Gênesis em busca de SLEs que formassem os nomes e datas dos rabiı calcularam quão próximas no texto as sequências gerando os nomes estavam das sequê gerando as datas correspondentes. Aí embaralharam as 32 datas, de modo que cada delas fosse agora combinada a um rabino ao acaso, e fizeram o teste novamente. aplicaram o mesmo método 1 milhão de vezes.[a] Se não houvesse relação no texto da entre os nomes dos rabinos e as datas correspondentes, seria de esperar que a combiı real entre rabinos e datas tivesse resultados semelhantes a um emaranhado de associ aleatórias. Não foi isso que descobriram. A associação correta acabou muito próxir topo da lista, conquistando a 453ª posição entre 1 milhão de competidores.

Eles tentaram a mesma coisa com outros textos: *Guerra e paz*, o Livro de Isaías (pa Escritura, mas não a parte que se entende ter sido escrita por Deus), e uma versão do G com as letras embaralhadas ao acaso. Em todos os casos, os verdadeiros aniversáric rabinos estavam no meio do bando.

A conclusão dos autores, redigida com característica sobriedade matem "Concluímos que a proximidade de SLEs com significados correlatos no livro do G não se deve ao acaso."

Apesar da linguagem discreta, este foi entendido como um achado surpreen realçado pelas credenciais matemáticas dos autores, especialmente de Rips. O arti referendado e publicado em 1994 na revista *Statistical Science*, acompanhado de um pr incomum, do editor Robert E. Kass, que escreveu:

> Nossos árbitros ficaram atônitos: suas crenças anteriores os faziam pensar que o livro do Gênesis não tinha possil de conter referências significativas a indivíduos dos tempos modernos; contudo, quando os autores realizaram a e verificações adicionais, o efeito persistiu. O artigo é, portanto, oferecido aos leitores de *Statistical Science* con intrigante charada.[4]

Apesar dos achados impressionantes, o artigo de Witztum não chamou muita at do público de imediato. Tudo mudou quando o jornalista americano Michael Drosnin falar nele. Drosnin saiu ele próprio à caça de SLEs, abandonando qualquer limi científica e contando todo aglomerado de sequências que pudesse achar como pre divina de acontecimentos futuros. Em 1997, publicou um livro, *O código da Bíblia*, cuja mostra um rolo de Torá desbotado, de aparência antiga, com sequências de letras circu

(1995), e isso foi uma poderosa propaganda para o livro, que também apresenta prec
certificadas pela Torá da Guerra do Golfo e da colisão do cometa Shoemaker-Levy 9
Júpiter em 1994.

Witztum, Rips e Rosenberg denunciaram o método ad hoc de Drosnin, mas m profecia fazem prodígios: *O código da Bíblia* foi um best-seller. Drosnin apareceu no *Winfrey Show* e na CNN, e teve audiências pessoais com Yasser Arafat, Shimon Per chefe de gabinete de Bill Clinton, John Podesta, durante as quais partilhou suas teorias o próximo fim dos dias.[b] Milhões viram o que parecia uma prova matemática de que a era a palavra de Deus, pessoas modernas com visão de mundo científica foram present com uma via inesperada rumo à aceitação da fé religiosa, e muitos enveredaram pc Tenho informações seguras de que um pai de filho recém-nascido, proveniente de família judia secular, esperou até o artigo na *Statiscal Science* ser oficialmente aceito de decidir circuncidar o filho. (Pela criança, espero que o processo de arbitragem tenh rápido.)

Mas justamente quando os códigos estavam conquistando ampla aceitação do pú seus alicerces se viram sob o ataque do mundo matemático. A controvérsia foi especial amarga entre a grande comunidade de matemáticos judeus ortodoxos. O Departamer Matemática de Harvard, onde eu era aluno de doutorado na época, tinha no corpo dc tanto David Kazhdan, que havia manifestado uma modesta abertura aos códigos, Shlomo Sternberg, ruidoso oponente, que pensava que a promoção dos códigos fa ortodoxos parecerem um bando de tolos e patetas. Sternberg desfechou um pesado a no *Notices of the American Mathematical Society* no qual chamava o artigo de Witztum e Rosenberg de "embuste", e dizia que Kazhdan e outros com opiniões semelhantes "r trazem vergonha a si mesmos, como também desgraçam a matemática".[5]

O chá da tarde do Departamento de Matemática foi meio constrangedor no dia er saiu o artigo de Sternberg, posso lhe garantir.

Eruditos religiosos também foram resistentes à sedução dos códigos. Alguns, co líderes da ieshiva[c] Aish HaTorah, abraçaram os códigos como meio de atrair judeu praticantes de volta para uma versão mais rigorosa da fé. Outros desconfiaram d mecanismo que representava acentuada ruptura com o estudo convencional da Torá. falar num distinto rabino que, no final de um longo jantar de Purim,[d] tradicional regado a bebidas, perguntou a um dos convidados, adepto do código: "Então, diga- que você faria se descobrisse um código na Torá dizendo que o sabá deveria ser no domi

Não haveria tal código, disse o colega, porque Deus ordenou que o sabá fosse no sá

O velho rabino não desistiu: "Tudo bem", ele disse, "mas e se houvesse?"

O jovem colega ficou calado por algum tempo, e finalmente falou: "Então, acho que de pensar no assunto."

Nesse ponto, o rabino determinou que os códigos deveriam ser rejeitados, pois enq existe de fato uma tradição judaica, em particular entre os rabinos de inclinações mí de realizar análises numéricas das letras da Torá, o processo pretende apenas aju compreender e apreciar o livro sagrado. Se o método pudesse ser usado, mesmo que princípio, para criar dúvidas acerca das leis básicas da fé, tratava-se de um métod

Por que os matemáticos rejeitaram o que parecia uma evidência clara da inspi divina da Torá? Para explicar, precisamos introduzir um novo personagem: o corret ações de Baltimore.

## O corretor de ações de Baltimore

Eis a parábola. Um dia, você recebe o informativo não solicitado de um corretor de em Baltimore contendo uma dica de que certa ação deve subir muito. Uma semana se e, exatamente como o corretor de Baltimore previra, a ação sobe. Na semana seguinte recebe uma nova edição do informativo, e dessa vez a dica é sobre uma ação cujo pr corretor acha que vai cair. De fato a ação despenca. Passam-se dez semanas, cada trazendo nova edição do misterioso informativo com nova predição, e toda vez a pre se torna verdade.

Na 11ª semana, você recebe um formulário para investir dinheiro com o corret Baltimore, claro que com uma polpuda comissão para cobrir a aguçada visão de me oferecida, tão amplamente demonstrada pela sequência de dez semanas de dicas pre exibidas nos informativos.

Esse parece um negócio bastante bom, certo? Sem dúvida o corretor de Baltimor acesso a algo – parece incrivelmente improvável que um completo trapaceiro, sem ne conhecimento especial do mercado, consiga acertar dez predições seguidas sobre a al queda de ações. Na verdade, você calcula as chances sem a menor dificuldade: se o trapa tem 50% de chance de acertar cada predição, então a chance de acertar as *duas* prime metade da metade, ou ¼; a chance de acertar as três primeiras é metade desse quarto, e assim por diante. Continuando esse cálculo, sua chance de acertar o comportamen mercado dez vezes seguidas[e] é:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{1024}\right.$$

Em outras palavras, a chance de um trapaceiro se sair tão bem é próxima de zero.

Mas as coisas parecem diferentes quando você reconta a história do ponto de vis corretor de Baltimore. Eis o que você não viu da primeira vez. Na primeira semana não foi a única pessoa que recebeu o informativo do corretor – ele o enviou a 10.240 pes Mas eles não eram todos iguais. Metade era como o seu, predizendo a alta de uma aç outra metade previa exatamente o oposto. As 5.120 pessoas que receberam uma pre furada do corretor nunca mais ouviram falar dele. Mas você e os outros 5.119 que recet a sua versão do informativo tiveram uma nova dica na semana seguinte. Desses informativos, metade dizia a mesma coisa que o seu e metade dizia o contrário. D dessa semana, ainda há 2.560 pessoas que receberam duas predições corretas seguida

E assim por diante.

Depois da décima semana, haverá dez pessoas sortudas (?) que receberam dez

escolher as ações jogando tripas de galinha contra a parede e interpretando as manc
de qualquer maneira, há dez destinatários de informativos na praça para quem ele p
um gênio. Dez pessoas de quem ele pode esperar arrecadar quantias substanciais
pessoas para as quais o desempenho passado não será garantia nenhuma de resul
futuros.

Muitas vezes tenho ouvido a parábola do corretor de Baltimore contada como fat
mas não consegui localizar nenhuma evidência de que efetivamente tenha ocorrido. A
mais próxima que encontrei foi um reality show de TV, de 2008 – sendo que esse ti
programa é aquilo a que recorremos hoje em busca de parábolas –, no qual o m
britânico Derren Brown fez uma jogada similar, enviando várias dicas de corridas de ca
para milhares de britânicos, e que teve como resultado acabar convencendo uma
pessoa de que bolara um sistema infalível de predição. (Brown, que gosta de di
alegações místicas mais do que promovê-las, expôs o mecanismo do truque no fin
programa, provavelmente fazendo mais pela educação matemática no Reino Unido qu
dúzia de especiais da BBC.)

Mas se você distorce o jogo, tornando-o menos claramente fraudulento, en
mantendo inalterado o potencial enganoso, descobre que o corretor de Baltimore est
e muito bem na indústria financeira. Quando uma companhia abre um fundo mútuo, m
vezes o mantém na casa por algum tempo antes de abri-lo ao público, numa prática cha
*incubação*.[6] A vida de um fundo incubado não é tão morna e segura quanto sugere o r
Caracteristicamente, as companhias incubam uma porção de fundos de uma só vez,
rimentando numerosas estratégias de investimento e alocação. Os fundos se atrope
competem no útero. Alguns mostram retornos atraentes, e logo são postos à disposiç
público, com extensiva documentação dos lucros até o momento. Mas os nanicos da nin
recebem tiros de misericórdia, muitas vezes sem qualquer conhecimento público d
algum dia tenham existido.

Agora, pode acontecer que os fundos mútuos que conseguem sair da incubadora d
representem investimentos inteligentes. As companhias que vendem fundos mútuos p
até acreditar nisso. Afinal, quem não acredita, quando uma jogada dá certo, que sua pr
esperteza e know-how de algum modo merecem o crédito? Mas os dados sugerem o op
os fundos da incubadora, uma vez chegando às mãos do público, não mantêm sua exc
performance pré-natal, oferecendo em vez disso os mesmos retornos que um f
mediano.[7]

O que isso significa para você, se for afortunado o bastante e tiver algum dinheir
investir? Significa que vai se dar melhor resistindo à sedução do novo fundo "quent
rendeu 10% nos últimos doze meses. Melhor seguir o conselho desprovido de *sex-a*
que provavelmente está enjoado de ouvir, o feijão com arroz do planejamento finan
em vez de sair à caça de um sistema mágico ou de um consultor com toque de Midas, p
seu dinheiro num grande e enfadonho fundo livre de taxas e esqueça. Quando você e
suas economias num fundo incubado, com seus retornos ofuscantes, você é como o
natário do informativo que investiu as economias de toda a vida com o corretor de Balti
Você se deixou manipular pelos resultados impressionantes, mas não sabe *quantas ch*

Isso parece jogar palavras cruzadas de tabuleiro com meu filho de oito anos. Se el insatisfeito com as letras que tira do saquinho, joga-as lá de volta e tira outras, repeti processo até ter as letras que quer. A seu ver, isso é perfeitamente justo; afinal, ele es olhos fechados, então não sabe que letras vai tirar! Mas se você der a si mesmo ch suficientes, acabará tirando o Z que está querendo. E não é porque tenha sorte, mas p está trapaceando.

A jogada do corretor de Baltimore funciona porque, como todo bom truque de m não tenta enganar você de imediato, ou seja, não tenta lhe dizer alguma coisa fals contrário, diz algo verdadeiro acerca do qual você tem a propensão de tirar concl erradas. De fato, *é* improvável acertar o comportamento de ações dez vezes seguidas, o o mágico que apostou em seis corridas de cavalo acerte o vencedor toda vez, ou qu fundo mútuo supere o mercado em 10%. O erro está em ficar surpreso com esse enc com o improvável. O Universo é grande, e se você está suficientemente sintonizado ocorrências surpreendentemente improváveis, você as encontrará. *Coisas improváveis tecem até demais.*

É maciçamente improvável ser atingido por um raio ou ganhar na loteria, mas coisas acontecem o tempo todo com as pessoas, porque há muita gente no mundo, e n compram bilhetes de loteria ou vão jogar golfe debaixo de tempestade, ou ambas as c A maioria das coincidências perde sua surpresa quando vista da distância apropriada. de julho de 2007, a loteria Cash 5, da Carolina do Norte, sorteou os números 4, 21, 2 39. Dois dias depois, os mesmos cinco números saíram outra vez. Isso parece altar improvável, e parece porque realmente o é. A chance de os dois sorteios da loteria s iguais por puro acaso era mínima, menos de duas em 1 milhão. Mas essa não é a qu relevante, se você está decidindo quanto deve ficar impressionado. Afinal, os sortei loteria Cash 5, por mais de um ano, já vinham oferecendo muitas oportunidades de c dência. Acontece que a chance de *algum* período de três dias apresentar dois resul idênticos era bem menos miraculoso: uma em mil.[8] E a Cash 5 não é o único jogo da ci Há centenas de apostas de loteria de cinco números correndo por todo o país, e assir sido há anos. Quando você junta todos eles, não é surpresa alguma obter uma coincid como dois resultados idênticos em três dias. Isso não torna qualquer coincidência indi menos improvável. Mas aí vem de novo o refrão: *coisas improváveis acontecem demais*

Aristóteles, como de hábito, esteve aqui primeiro: mesmo carecendo de qualquer formal de probabilidade, foi capaz de compreender que "é provável que coisas impro aconteçam. Isso posto, pode-se argumentar que *o que é improvável é provável*".[9]

Uma vez que você tenha realmente absorvido essa verdade fundamental, o corret Baltimore não tem poder sobre você. É muito improvável que o corretor tenha lhe entr dez escolhas corretas de ações; não é nada de espantar que tenha entregado a *alguém* sequência tão boa, dadas as 10 mil chances. Na famosa formulação do estatístico brit R.A. Fisher: "'Uma chance em 1 milhão' sem dúvida ocorrerá com uma frequência maior nem menor, por mais que fiquemos surpresos de ter acontecido *conosco*."[10]

Os decodificadores da Bíblia não escreveram 10 mil versões do seu artigo e as manc para 10 mil revistas de estatística. Então, é difícil ver, de início, como sua história se asser à jogada do corretor de Baltimore.

Mas quando os matemáticos assumiram o "desafio" que Kass menciona no prefác revista, buscando alguma explicação diferente de "Foi Deus quem fez" para os resul do código da Bíblia, eles descobriram que o assunto não era tão simples quanto Witz companhia fizeram parecer. O andamento foi determinado por Brendan McKay, cie da computação australiano, e Dror Bar-Natan, matemático israelense lecionando ent Universidade Hebraica. Eles abordaram o ponto crítico de que os rabinos medievai tinham passaportes nem certidões de nascimento concedendo-lhes nomes oficiais. mencionados por alcunhas, e diferentes autores podiam se referir ao mesmo rabi maneiras diferentes. Se Dwayne "The Rock" Johnson fosse um rabino famoso, por exe você procuraria uma predição do seu nascimento na Torá como Dwayne Johnson The Dwayne "The Rock" Johnson, D.T.R. ou todos esses?

Essa ambiguidade cria algum espaço de manobra para os caçadores de códigos. Con o rabi Avraham ben Dov Ber Friedman, místico chassídico do século XVIII que vi trabalhou no *shtetl* de Fastov, na Ucrânia. Witztum, Rips e Rosenberg usam "Rabi Avra e "HaMalach" ("O Anjo") como alcunha. Mas por que, perguntam McKay e Bar-N usam "HaMalach" isoladamente, e não "Rabi Avraham HaMalach", nome pelo qual o r também era frequentemente conhecido?

McKay e Bar-Natan descobriram[11] que esse espaço de manobra nas escolhas dos n levou a drásticas mudanças na qualidade dos resultados. Eles fizeram um conjunto dife de escolhas sobre as alcunhas dos rabis; suas opções, segundo os estudiosos da Bíblia, t tanto sentido quanto as de Witztum (um rabino chamou as duas listas de nom "igualmente espantosas").[12] Descobriram que com a nova lista de nomes algo muito im sionante transpirava. A Torá parecia não mais detectar as datas de nascimento e mort notáveis rabínicos. Mas a edição hebraica de *Guerra e paz* cravava em cima, identific os rabinos com suas datas corretas tão bem quanto o livro do Gênesis no artigo de Wit

O que isso pode significar? Não, e eu me apresso em dizer, que Liev Tolstói tenha e seu romance com os nomes dos rabinos ocultos no interior, destinados a se revelar a depois que o hebraico moderno tivesse se desenvolvido e as obras clássicas da liter mundial traduzidas para o idioma. Não, e McKay e Bar-Natan estão apresentand potente argumento acerca do poder do espaço de manobra. Espaço de manobra é o corretor de Baltimore tem quando dá a si mesmo uma profusão de chances de ga espaço de manobra é o que a companhia de fundos mútuos tem quando resolve qua seus fundos secretamente incubados são ganhadores e quais são lixo. Espaço de manc o que McKay e Bar-Natan usaram para elaborar uma lista de nomes rabínicos q encaixou bem em *Guerra e paz*. Quando você está tentando extrair inferências confiáv eventos improváveis, o espaço de manobra é o inimigo.

Num artigo posterior,[13] McKay e Bar-Natan pediram a Simcha Emanuel, profess Talmude na Universidade de Tel Aviv, para elaborar outra lista de alcunhas, est destinada à compatibilidade com a Torá nem com *Guerra e paz*. Nela, a Torá saiu-se a

É muito improvável que qualquer conjunto de alcunhas rabínicas esteja bem enca com datas de nascimento e morte no livro do Gênesis. Mas, com tantas maneiras de esc os nomes, não é absolutamente improvável que entre todas as escolhas houvesse *um* fizesse a Torá parecer misteriosamente presciente. Dadas as chances suficientes, códigos é facílimo. É especialmente fácil se você usar a abordagem menos científi Michael Drosnin para achar códigos. Disse ele dos céticos: "Quando meus críticos ach uma mensagem sobre o assassinato de um primeiro-ministro encriptada em *Moby Di* acreditarei neles." McKay encontrou depressa sequências de letras equidistantes em *Dick* referindo-se ao assassinato de John Kennedy, Indira Gandhi, Leon Trótski e, par ficar atrás, do próprio Drosnin. Enquanto escrevo isto, Drosnin continua vivo e passa apesar da profecia. Ele está em seu terceiro livro de códigos da Bíblia, sendo que divul último com um anúncio de página inteira[14] numa edição de dezembro de 2010 do *New Times*, alertando o presidente Obama de que, segundo sequências de letras oculta Escrituras, Osama bin Laden já poderia ter uma arma nuclear.

Witztum, Rips e Rosenberg insistem[15] em que não eram como os mestres dos fund incubadora, revelando ao público apenas os experimentos que deram os melhores resul possíveis; sua lista exata de nomes foi escolhida antecipadamente, dizem eles, ant fazerem qualquer teste. Isso pode muito bem ser verdade. No entanto, mesmo que lança uma luz muito diferente sobre o miraculoso sucesso dos códigos bíblicos. Que se garimpar a Torá, bem como *Guerra e paz*, e ter sucesso para *alguma* versão dos nome rabinos, isso não é surpresa. O milagre, se é que há um milagre, é que Witztum e seus co foram levados a escolher precisamente aquelas versões dos nomes nos quais a Torá apr tava os melhores resultados.

Há, porém, uma ponta solta que deveria preocupar você. McKay e Bar-Natan cr um caso convincente de que o espaço de manobra no projeto do experimento de Wit era suficiente para explicar os códigos da Bíblia. Contudo, o experimento de Witztu realizado usando testes estatísticos padronizados, os mesmos que os cientistas empr para julgar alegações a respeito de tudo, desde medicamentos até políticas econômic artigo não teria sido aceito na *Statistical Science* de outra maneira. Se o artigo pass teste, não deveríamos ter aceitado suas conclusões, por mais absurdas que pudessem par Em outras palavras: se agora nos sentimos à vontade para rejeitar as conclusões do e de Witztum, o que isso diz sobre a confiabilidade dos nossos testes estatísticos padroniz

Diz que você deveria ficar um pouco preocupado com eles. E acontece que, mesm as informações da Torá, cientistas e estatísticos já começaram a se preocupar com os há algum tempo.

---

[a] Que é apenas uma fração minúscula das *permutações* possíveis das 32 datas, que são ac 263.130.836.933.693.530.167.218.012.160.000.000.

[b] Que deveria acontecer em 2006. Então, o que houve?

[c] Seminário rabínico. (N.T.)

[d] Festividade judaica que celebra a salvação dos judeus na Pérsia, no século IV AEC, narrada no livro de Ester. (N.

[e] Existe um princípio útil, a *regra do produto*, oculta nesse cálculo. Se a chance de acontecer truns é *p*, e a ch

[f] Essa história certamente remonta aos tempos em que esse processo envolveria reproduzir e enviar 10 mil docu físicos, mas é ainda mais realista agora que esse tipo de correspondência de massa é executável eletronicamente co praticamente zero.

# 7. Peixe morto não lê mentes

POIS AQUI ESTÁ A COISA: o arranca-rabo sobre os códigos da Bíblia não é o único em q usou o kit-padrão de ferramentas estatísticas para deduzir um resultado que parece m Um dos temas mais quentes da ciência médica é a neuroimagem funcional, que pro fazer os cientistas verem seus pensamentos e sentimentos faiscarem nas sinapses em t real por meio de sensores cada vez mais acurados. Na conferência de 2009 da Organi para Mapeamento do Cérebro Humano, em São Francisco, o neurocientista Craig Be da Universidade da Califórnia, Santa Barbara, apresentou um painel chamado "Corr neurais da perspectiva interespécies no exame pós-morte do salmão do Atlântico argumento em favor da correção de comparações múltiplas".[1] Leva alguns segundos decifrar o jargão do título, mas, quando se consegue, o painel anuncia claramente a nat inusitada de seus resultados. Mostrou-se a um peixe morto, escaneado por um equipam de Imagem por Ressonância Magnética Funcional (IRMf), uma série de fotografias de humanos, e descobriu-se que ele tinha capacidade surpreendentemente forte de aval modo correto as emoções das pessoas exibidas nas fotos. Já teria sido impressionante uma pessoa morta ou um peixe vivo. Com um peixe morto, então, isso é material par Prêmio Nobel!

Mas o artigo, claro, é uma piada em tom sério. E muito bem executada: especialmente da seção "Métodos", que começa:

> Um salmão maduro do Atlântico (*Salmo salar*) participou do estudo de IRMf. O salmão tinha aproximadam centímetros, pesava 1,7 quilo e não estava vivo por ocasião do escaneamento. … Uma proteção de espuma foi co dentro do capacete sensor para a cabeça como método de limitar o movimento do salmão durante o escanea mas mostrou-se totalmente desnecessária, pois o movimento do sujeito foi excepcionalmente baixo.[2]

A piada, como todas as piadas,[3] é um ataque velado. Nesse caso, um ataque à metodo negligente dos pesquisadores de neuroimagem que cometem o erro de ignorar a ve fundamental de que coisas improváveis acontecem a toda hora. Os neurocientistas div seus escaneamentos de IRMf em dezenas de milhares de pequenos pedaços, cham voxels, cada qual correspondendo a uma pequena região do cérebro. Quando se esc um cérebro, mesmo um cérebro de peixe morto, há certa quantidade de ruído aleatór cada voxel. É muito improvável que esse ruído venha a ocorrer exatamente no instan que você mostra ao peixe o instantâneo de uma pessoa em situação emocional ext Mas o sistema nervoso é um lugar imenso, com dezenas de milhares de voxels para esc As chances de que um desses voxels forneça dados que combinem bem com as foto bastante altas.

Foi exatamente o que Bennett e seus colaboradores descobriram. Na verdade localizaram dois grupos de voxels que fizeram um excelente trabalho de empatia c emoção humana, um na cavidade encefálica medial do salmão e outro na coluna ver superior. O objetivo do artigo de Bennett é alertar para o fato de que os métodos proba de avaliar resultados, a maneira como estabelecemos os limiares entre um fenômeno a estática aleatória, ficam perigosamente pressionados nesta época de massivos conj de dados obtidos sem muito esforço. Precisamos pensar com muito cuidado se n padrões para evidências são suficientemente estritos, se o empático salmão passa pelo

Quanto mais oportunidades você dá a si mesmo de ficar surpreso, mais alto deve s limiar para a surpresa. Se, na internet, uma pessoa estranha qualquer que tenha elim todos os grãos produzidos nos Estados Unidos de seu consumo alimentar relata que p 7 quilos e que seu eczema sumiu, você não deve tomar isso como uma evidência for favor do plano de eliminação do milho. Alguém está vendendo um livro sobre esse p milhares de pessoas compraram o livro e tentaram a dieta. Há boas chances de simplesmente por acaso, uma delas tenha perda de peso e melhora da pele na se seguinte. Esse é o sujeito que vai se conectar como "diga adeus ao milho nº 452" e p seu empolgado testemunho, enquanto as pessoas para as quais a dieta falhou perman caladas.

O resultado surpreendente do artigo de Bennett não é que um ou dois voxels num morto passem num teste estatístico, é que uma proporção substancial dos artigos neuroimagem que ele examinou *não* tenham utilizado salvaguardas estatísticas (conhe como "correção de comparações múltiplas") que levam em conta a onipresença do ir vável. Sem essas correções, os cientistas correm o sério risco de fazer a jogada do co de Baltimore, e não só com os seus colegas, mas consigo mesmo. Ficar empolgado voxels de peixe que se encaixam em fotos e ignorar o resto é potencialmente tão per quanto ficar empolgado com uma série bem-sucedida de informativos sobre ações igno as inúmeras outras edições com previsões furadas e que foram parar no lixo.

## Engenharia reversa, ou por que álgebra é difícil

Há dois momentos no decurso da educação formal em que um monte de alunos cai do da matemática. O primeiro vem nas séries do ensino fundamental, quando são introdu as frações. Até aquele momento, um número é um *número natural*, uma das cifras 0, …. É a resposta para uma pergunta do tipo "quantos".[a] Ir dessa noção, tão primitiva c diz que muitos animais a compreendem,[4] para a ideia radicalmente mais ampla de qu número pode significar "qual parte de" é uma drástica mudança filosófica. ("Deus números naturais", disse Leopold Kronecker, algebrista do século XIX, "todo o resto é do homem.")

A segunda mudança perigosa nos trilhos é a álgebra. Por que ela é tão difícil? Porqu a álgebra aparecer, você faz cálculos numéricos de forma diretamente algorítmica.

alguns números na caixa da adição, ou na caixa da multiplicação, ou mesmo, nas esco mentalidade mais tradicional, na caixa da divisão longa, gira a manivela e informa saiu do outro lado.

Álgebra é diferente. É cálculo de trás para a frente. Quando lhe pedem que resolva

$$x + 8 = 15,$$

você sabe o que *saiu* da caixa de adição (ou seja, 15), e estão lhe pedindo que reve mecanismo e descubra o que, junto com o 8, foi colocado dentro da caixa.

Nesse caso, como seu professor de matemática da 7ª série sem dúvida lhe disse, pode trocar as coisas de lado para deixar de novo tudo certinho do lado direito:

$$x = 15 - 8,$$

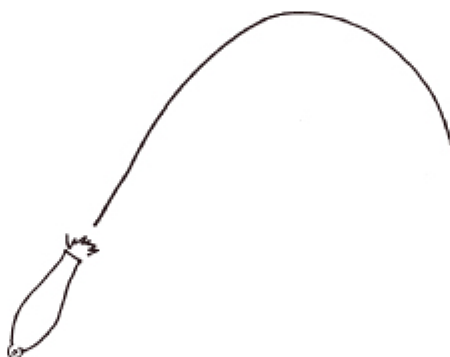
e nesse ponto basta você enfiar 15 e 8 na caixa de subtração (certificando-se de qual colocar primeiro…) e descobrir que $x$ deve ser 7.

Mas nem sempre é tão fácil. Pode ser que você tenha que resolver uma *equação de se grau*, como

$$x^2 - x = 1$$

É mesmo? (Posso ouvir você chorando.) Você *resolveria*? Além de ter sido pedido professor, por que você haveria de resolver?

Pense outra vez naquele míssil do Capítulo 2, ainda viajando furiosamente er direção:



Talvez você saiba que o míssil foi disparado de uma altura 100 metros acima do ní solo, com uma velocidade ascendente de 200 metros por segundo. Se não houvesse como a gravidade, o míssil simplesmente continuaria a subir em linha reta, de acordo as leis de Newton, ficando 200 metros mais alto a cada segundo, e sua altura após $x$ segu seria descrita pela função linear

$$\text{altura} = 100 + 200x.$$

Mas *existe* uma coisa chamada gravidade que dobra o arco e força o míssil a fazer curva de volta para a Terra. Acontece que o efeito da gravidade é descrito adicionan um termo quadrático, ou de segundo grau:

$$\text{altura} = 100 + 200x - 5x^2,$$

onde o termo quadrático é *negativo* só porque a gravidade empurra o míssil para ba não para cima.

Há um monte de perguntas que você poderia fazer sobre um míssil voando er direção, mas uma em particular é de grande importância: quando ele vai chegar ao Para resolvê-la, basta responder à pergunta: quando a altura do míssil será zero? Ou para que valor de $x$ acontece de

$$100 + 200x - 5x^2 = 0?$$

De maneira nenhuma está claro como você deve "ajeitar" essa equação para achar o de $x$. Mas talvez você não precise. Tentativa e erro são uma arma poderosa. Se você f $= 10$ na fórmula acima, para ver a que altura o míssil vai estar depois de 10 segundos, c 1.600 metros. Faça $x = 20$, e você obtém 2.100 metros, então parece que o míssil ainda estar subindo. Quando $x = 30$, você obtém 1.600 metros outra vez: promissor; devem passado pelo pico. Em $x = 40$, o míssil está de novo apenas 100 metros acima do Poderíamos botar mais 10 segundos, mas, quando já estamos tão perto do impacto certamente será exagerado. Se você fizer $x = 41$, obterá −105 metros, o que não quer que você esteja prevendo que o míssil já começou a escavar a superfície da Terra, e sir o impacto já ocorreu, de modo que seu belo e claro modelo do movimento do míssil mais, como dizemos em balística, operacional.

Então, se 41 segundos é demais, que tal 40,5? Isso dá −1,25 metro, só um pouq abaixo de zero. Volte o relógio um pouco para 40,4, e você obtém 19,2 metros, en impacto ainda não ocorreu. 40,49? Muito perto, só, 0,8 metro acima do solo.

Você pode ver que, brincando de tentativa e erro, girando o botão do t cuidadosamente para a frente e para trás, você consegue uma aproximação do tem impacto tão próxima quanto quiser.

Mas será que "resolvemos" a equação? Você provavelmente está hesitando em dize sim. Embora fique afinando cada vez mais a sintonia de seus palpites até a hora do im para

40,4939015319…

segundos após o lançamento, você não sabe *a* resposta, mas apenas uma *aproximaç* resposta. Na prática, porém, isso não ajuda muito você a definir o instante de impacto a precisão de milionésimo de segundo, não é? Provavelmente dizer "mais ou men segundos" já é o suficiente. Tente gerar uma resposta mais precisa que essa, e estará perc

progresso do míssil deixa de levar em conta diversos outros fatores, como a resistênc ar, a *variação* da resistência do ar decorrente do clima, a rotação do próprio míssil, e por diante. Esses efeitos podem ser pequenos, mas com certeza são grandes o bastant impedir que você saiba com precisão de microssegundos quando o projétil irá pinta comparecer a seu encontro com o solo.

Se você quer uma solução satisfatoriamente exata, não tenha medo, a fórmula da eq do segundo grau está aqui para ajudar. Você pode muito bem ter decorado a fórmula al vez na vida, porém, a menos que possua uma memória extraordinariamente privilegia tenha doze anos, você não a lembra de cor neste momento. Então aqui está ela: se *x* solução para

$$c + bx + ax^2 = 0,$$

onde *a*, *b* e *c* são números quaisquer, então,

$$x = -\frac{1}{2a}\left(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

No caso do míssil, $c = 100$, $b = 200$ e $a = -5$. Então, o que a fórmula da equaç segundo grau tem a dizer sobre *x* é que

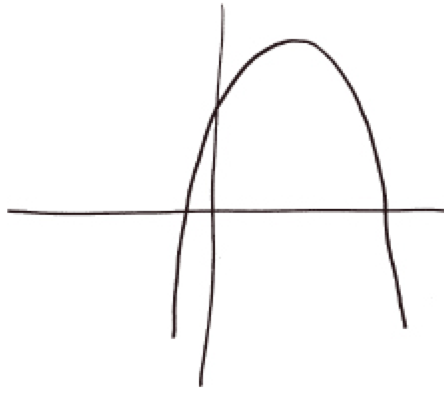
$$x = \frac{1}{10}\left(200 \pm \sqrt{200^2 + 4 \cdot 5 \cdot 100}\right)$$

A maioria dos símbolos aí são coisas que você pode digitar na sua calculadora, mas uma exceção engraçada, o ±. Parece um sinal de mais e um sinal de menos que se demais, e não está muito longe disso. O sinal indica que, embora tenhamos começado sentença matemática totalmente confiantes, com

$$x =,$$

acabamos num estado de ambivalência. O ±, que corresponde de certo modo à pe branco, o coringa, do jogo de palavras cruzadas de tabuleiro, pode ser lido como + ou −, à nossa escolha. Cada escolha que fazemos produz um valor de *x* que satisfaz a eq $100 + 200x - 5x^2 = 0$. Não há uma solução única para essa equação. Existem duas.

A existência de dois valores de *x* que satisfazem a equação pode ser visualizada, m que você tenha esquecido há muito a fórmula da equação de segundo grau. Você desenhar um gráfico representativo da equação $y = 100 + 200x - 5x^2$ e obter uma par virada para baixo, assim:



A linha horizontal é o eixo $x$, os pontos do plano cuja coordenada $y$ vale zero. Qua curva $y = 100 + 200x - 5x^2$ cruza o eixo $x$, é o caso em que $y$ vale simultaneamente 200$x - 5x^2$ e $y = 0$; então, $100 + 200x - 5x^2 = 0$, precisamente a equação que estamos ten resolver, agora numa forma geométrica, como uma pergunta acerca da intersecção uma curva e a linha horizontal.

A intuição geométrica exige que, se essa parábola tem a ponta acima do eixo $x$, ela cruzar esse eixo exatamente em dois lugares, nem mais nem menos. Em outras palavr dois valores de $x$ tais que $100 + 200x - 5x^2 = 0$.

Então, quais são esses dois valores?

Se escolhemos ler ± como +, obtemos

$$x = 20 + 2\sqrt{105},$$

que é 40,4939015319…, a mesma resposta a que chegamos pela tentativa e erro. M escolhermos –, obtemos

$$x = 20 - 2\sqrt{105},$$

que é −0,4939015319…

Como resposta à nossa pergunta inicial, isso fica meio sem sentido. A resposta "Quando o míssil vai me atingir?" não pode ser "Meio segundo atrás".

Contudo, esse valor negativo de $x$ é uma solução perfeitamente boa para a equaç quando a matemática nos diz algo, devemos no mínimo tentar escutar. O que signific número negativo? Eis uma maneira de entendê-lo. Dissemos que o míssil foi lançad metros acima do solo, com uma velocidade de 200 metros por segundo. Mas o que ef mente usamos no instante zero é que o míssil estava subindo com essa velocidade na posição. Mas e se o lançamento não tivesse sido realmente assim? Talvez não tivesse occ no instante zero, de 100 metros acima, mas em algum instante anterior, diretamen chão. Em que instante anterior?

O cálculo nos diz: há exatamente dois instantes em que o míssil está no chão. Um é 0,4939… segundos atrás. Foi aí que o míssil foi lançado. O outro instante é 40,4 segundos a partir de agora. É aí que o míssil atinge o chão.

Talvez não pareça tão problemático – especialmente se você está acostumado à fór da equação de segundo grau – obter duas respostas para a mesma pergunta. Você p seis longos anos da sua vida descobrindo qual *é* a resposta, e agora, de repente, não algo assim.

Essas são apenas equações quadráticas! E se você tiver que resolver

$$x^3 + 2x^2 - 11x = 12?$$

Essa é uma equação de terceiro grau, ou uma equação *cúbica*, o que vale dizer que er $x$ elevado à terceira potência. Felizmente, *existe* uma fórmula para a equação cúbic permite descobrir, por cálculo direto, que valores de $x$ poderiam ter entrado na caixa fazer sair 12 quando você girar a manivela. Mas você não aprendeu a fórmula cúbi escola, e a razão disso é que ela é muito confusa, e só foi deduzida no fim do Renascim quando algebristas itinerantes perambulavam pela Itália, engalfinhando-se em feroz talhas públicas para resolver equações, com dinheiro e status em jogo. As poucas pe que conheciam a fórmula da equação cúbica a mantinham em segredo ou as anotava crípticos versos rimados.[5]

Longa história. A questão é: engenharia reversa é difícil.

O problema da inferência, aquilo com que os decifradores de códigos da Bíb debatiam, é difícil por ser exatamente esse tipo de problema. Quando somos cientist eruditos da Torá, ou crianças pequenas vagando nas nuvens, somos presenteados *observações* e solicitados a construir *teorias* – o que foi colocado na caixa para produ mundo que vemos? Inferência é uma coisa difícil, talvez a coisa mais difícil. Pelas fo das nuvens e o modo como se movem, nós lutamos para retroceder, resolver $x$, o si que as formou.

## Derrotando o zero

Ficamos dando voltas em torno da questão fundamental: quanto devo me surpreende aquilo que vejo no mundo? Este é um livro sobre matemática, e você deve desconfia existe um meio numérico de chegar a isso. Existe, sim. Mas é cheio de perigos. Precis falar de *valores-p*.

Mas primeiro precisamos falar de improbabilidade, algo sobre o qual até agora f inaceitavelmente vagos. Mas existe um motivo para isso. Há partes da matemática, co geometria e a aritmética, que ensinamos às nossas crianças, e que as crianças, em medida, ensinam a si mesmas. São as partes mais próximas da nossa intuição inata. Nasc praticamente sabendo contar e categorizar objetos pelo seu formato e localizaçã elaboração formal, matemática, desses conceitos não é muito diferente daquela com a começamos.

Probabilidade é diferente. Com certeza temos uma intuição embutida em nós para p sobre certas coisas. Muito mais difícil é articulá-las. Há uma razão para a teoria maten

tardiamente no currículo de matemática, se é que aparece. Quando você tenta pensa cuidado sobre o que a probabilidade *significa*, fica um pouquinho confuso. Quando diz "A probabilidade de uma moeda lançada dar cara é de ½", estamos invocando a l grandes números do Capítulo 4, que diz que, se você lançar a moeda muitas, muitas a proporção de caras quase inevitavelmente se aproximará de ½, como que restringid um túnel que vai se estreitando. É isso que se chama *visão frequentista da probabilida*

Mas o que estamos querendo dizer quando falamos "A probabilidade de chover an é de 20%"? Amanhã só acontece uma vez, não é um experimento que possamos re como lançar uma moeda vezes e mais vezes. Com algum esforço, podemos inserir o no modelo frequentista. Talvez queiramos dizer que, entre alguma grande populaç dias com condição similar a este, o dia seguinte foi chuvoso em 20% das vezes. Mas a encalha quando lhe perguntam: "Qual a probabilidade de a raça humana ser extint próximos mil anos?" Este é, quase por definição, um experimento que você não pode re Usamos a probabilidade até para falar de acontecimentos que não podem ser pen como sujeitos ao acaso.

Qual a probabilidade de que o consumo de azeite de oliva previna o câncer? Q probabilidade de que Shakespeare seja o autor das peças de Shakespeare? Qual a prob dade de que Deus tenha escrito a Bíblia e criado a Terra? É difícil falar sobre essas coi mesma linguagem que usamos para estimar os resultados de lançamento de moeda jogo de dados. Ainda assim, nós nos descobrimos capazes de dizer, sobre perguntas essas: "Parece improvável" ou "Parece provável". Uma vez feito isso, como podemos r à tentação de perguntar: "*Quanto* provável?"

Uma coisa é perguntar, outra é responder. Não consigo pensar em nenhum experim que avalie diretamente a probabilidade de que o "homem lá em cima" esteja realme em cima" (ou que seja um "homem", já que tocamos no assunto). Então temos de f segunda melhor coisa, ou pelo menos o que a estatística tradicional afirma ser a se melhor coisa. (Como veremos, há controvérsia quanto a isso.)

Dissemos que era improvável que os nomes de rabinos medievais estivessem ocult letras da Torá. Será? Muitos judeus religiosos partem do ponto de vista de que tudo q para se saber, de uma maneira ou outra, está contido nas palavras da Torá. Se isso é ve a presença dos nomes e aniversários dos rabinos não é absolutamente improvável realidade, é quase uma exigência.

Pode-se contar história semelhante sobre a loteria da Carolina do Norte. Soa impr que um conjunto idêntico de números ganhadores saísse duas vezes em uma seman verdade, se você concordar com a hipótese de que os números são tirados de uma completamente ao acaso. Mas talvez você não concorde. Talvez você pense que o si aleatório não funciona direito, e que os números 4, 21, 23, 34, 39 têm mais probabilida sair que os outros. Ou talvez você ache que um funcionário corrupto da loteri escolhendo os números para combinar com determinado bilhete. Em qualquer hipóteses, a impressionante coincidência não é absolutamente improvável. Improbabili tal como descrita aqui, é uma noção *relativa*, não absoluta. Quando dizemos qu

resultado é improvável, estamos sempre dizendo, explicitamente ou não, que ele é impro segundo determinado conjunto de hipóteses que fizemos sobre o mecanismo subjacer mundo.

Muitas questões científicas podem ser reduzidas a um simples sim ou não. Alguma está acontecendo, ou não? Uma nova droga consegue atacar a doença que se propõe ou não faz nada? Uma intervenção psicológica faz você mais feliz, vivaz, sexy, ou nã absolutamente nada? O cenário do "não faz nada" é chamado *hipótese nula*. Ou s hipótese nula é a de que a intervenção que você está estudando não tem efeito nenhu você é um pesquisador que desenvolveu uma droga nova, a hipótese nula é a coisa qu você passar a noite acordado. A não ser que consiga excluí-la, não saberá se está no can de um grande avanço médico ou simplesmente desmatando a trilha metabólica errad

Então, como você faz para excluir? O mecanismo-padrão, chamado *teste de signific da hipótese nula*, foi desenvolvido em sua forma mais comumente usada por R.A. Fis fundador da moderna prática da estatística,[b] no começo do século XX.

A coisa funciona assim. Primeiro, você precisa realizar um experimento. Pode cor com uma centena de sujeitos, e então escolhe ao acaso metade deles para tomar sua milagrosa, enquanto a outra metade toma um placebo. Sua esperança, obviamente, é d os pacientes que tomam a droga tenham menos probabilidade de morrer que aquele tomam a pílula de açúcar.

A partir daí, o protocolo pode parecer simples: se você observa menos mortes en pacientes que tomam a droga do que entre os que tomam o placebo, declare vitó preencha uma requisição na Administração de Alimentos e Drogas (FDA, na sigla em in para comercializar o produto. Mas isso está errado. Não basta que os dados sejam consist com sua teoria. Eles precisam ser *inconsistentes* com a negação de sua teoria, a te hipótese nula. Eu posso declarar ter capacidades telecinéticas tão poderosas que sou de arrastar o sol e fazê-lo subir de sob o horizonte – se você quer uma prova, basta s 5h da manhã e ver os resultados do meu trabalho! Mas esse tipo de evidência não é evid nenhuma, porque, segundo a hipótese nula de que eu careço de poderes psíquicos, nascerá de qualquer forma.

Interpretar o resultado de um experimento clínico requer cuidado semelhante. V dar um exemplo numérico. Suponha que estejamos no terreno da hipótese nula, em chance de ocorrer uma morte é exatamente a mesma (digamos, 10%) para os cinq pacientes que tomaram a droga e os cinquenta pacientes que tomaram o placebo. Ma não significa que cinco pacientes que tomam a droga morrem e cinco pacientes que to o placebo morrem. Na verdade, a chance de exatamente cinco pacientes da droga mor é de cerca de 18,5%. Não muito provável, assim como não é muito provável que uma de lançamentos de moeda dê exatamente a mesma quantidade de caras e coroas. Do m modo, não é muito provável que exatamente a mesma quantidade de pacientes da dr de pacientes do placebo expirem no decorrer do experimento. Eu calculei:

13,3% de morrerem quantidades iguais de pacientes da droga e do placebo;
43,3% de morrerem menos pacientes do placebo que da droga;

Constatar resultados melhores entre pacientes da droga que entre pacientes do pla diz muito pouco, uma vez que isso não é absolutamente improvável, mesmo pela hipó nula de que a sua droga não funcione.

Mas as coisas serão diferentes se os pacientes da droga se saírem *bem* melhor. Sup que cinco dos pacientes do placebo morram durante o experimento, mas não morra nei dos pacientes da droga. Se a hipótese nula estiver correta, ambas as classes de pac deveriam ter uma chance de 90% de sobrevivência. Mas, nesse caso, é altamente impro que todos os cinquenta pacientes da droga sobrevivam. O primeiro dos pacientes da tem uma chance de 90%; agora, a chance de que não só primeiro, mas também o seg paciente sobreviva, é de 90% desses 90%, ou 81% – e se você quer que o terceiro pa também sobreviva, a chance de isso acontecer é de apenas 90% desses 81%, ou 72,9%. novo paciente cuja sobrevivência você estipula corta um pouquinho das chances, e, no do processo, quando você estiver indagando sobre a probabilidade de todos os cinq pacientes sobreviverem, a fatia que sobra é bem fina:

$(0,9) \times (0,9) \times (0,9) \times \ldots$ cinquenta vezes! $\ldots \times (0,9) \times (0,9) = 0,00515 \ldots$

Pela hipótese nula, há apenas uma chance em duzentas de obter resultados tão assim. Isso é muito mais convincente. Se eu alego que posso fazer o sol nascer com o de minha mente, você não deve se impressionar com meus poderes. Mas se eu aleg posso fazer o sol *não* nascer, e o sol não nasce, então demonstrei um resultado improvável pela hipótese nula, e é bom você ficar atento.

Então, eis o procedimento para excluir a hipótese nula, em forma de comando de ite

1. Realize um experimento.
2. Suponha que a hipótese nula seja verdadeira, e seja $p$ a probabilidade (po hipótese) de obter resultados tão extremos quanto os observados.
3. O número $p$ é chamado valor-$p$. Se ele é muito pequeno, alegre-se; você pode que seus resultados são *estatisticamente significativos*. Se é grande, reconheça hipótese nula não foi excluída.

Quando dizemos "muito pequeno", quanto é isso? Não há um princípio que estabe uma linha divisória rígida entre o que é significativo e o que não é, mas há uma tradiç que começa com o próprio Fisher, que agora é amplamente adotada, de tomar $p = 0,0$ $1/20$, como esse limiar.

O teste de significância da hipótese nula é popular porque capta a nossa forma int de raciocinar acerca da incerteza. Por que achamos os códigos da Bíblia convincentes menos à primeira vista? Porque códigos como os revelados por Witztum são muito ir váveis pela hipótese nula de que a Torá não conhece o futuro. O valor de $p$ – a probabil

de encontrar tantas sequências de letras equidistantes, tão acuradas em sua desc
demográfica de rabinos notáveis – é muito próximo de zero.

Versões desse argumento em favor da criação divina precedem em mu
desenvolvimento formal de Fisher. O mundo é tão ricamente estruturado e tão perfeitar
ordenado – quão improvável seria haver um mundo como este, pela hipótese nula d
não houve um planejador primordial para construir tudo!

A primeira pessoa que teve a iniciativa de tornar esse argumento matemático foi
Arbuthnot, médico real, satírico, correspondente do poeta Alexander Pope e matem
em tempo parcial.[6] Arbuthnot estudou os registros de crianças nascidas em Londres
1629 e 1710, e descobriu que havia uma notável regularidade: em cada um desses 82
nasceram mais meninos que meninas. Quais são as chances, indagou Arbuthnot, de s
uma coincidência dessas pela hipótese nula de não haver Deus e que tudo era casual
aleatória? Então, a probabilidade de que, num dado ano, Londres recebesse mais me
que meninas seria de ½; e o valor-*p*, a probabilidade de haver mais meninos em 82
seguidos é

$$\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times \ldots \text{ 82 vezes } \ldots \times\left(\frac{1}{2}\right)$$

ou um pouco pior que uma em 4 setilhões. Em outras palavras, mais ou menos
Arbuthnot publicou seus achados num artigo chamado “An argument for Divine Provic
taken from the constant regularly observed in the birth of both sexes”.

O argumento de Arbuthnot foi muito elogiado e repetido pelas autoridades clericais
outros matemáticos logo apontaram falhas no raciocínio. A principal delas era a não raz
especificidade de sua hipótese nula. Os dados de Arbuthnot certamente se esteia
hipótese de que o sexo das crianças é determinado ao acaso, e cada qual tem chance
de nascer homem ou mulher. Mas por que a chance haveria de ser igual? Nicolas Ber
propôs hipótese nula diferente: que o sexo de uma criança é determinado pelo acaso, c
chance de $18/35$ de nascer menino e $17/35$ de nascer menina. A hipótese nula de Bernoulli
ateísta quanto a de Arbuthnot e se ajusta perfeitamente aos dados. Se você lança uma n
82 vezes e obtém 82 caras, deve ficar pensando: “Tem alguma coisa viciada nessa moe
não “Deus adora caras”.[c]

Embora o argumento de Arbuthnot não tenha sido amplamente aceito, seu prir
teve continuidade. Arbuthnot é o pai intelectual não só dos decifradores de códig
Bíblia, como também dos “cientistas da criação”, que argumentam, até hoje, que a matem
exige que haja um deus, com base na ideia de que um mundo sem deus muito impro
mente teria a aparência do nosso mundo.[d][7]

Mas o teste da significância não se restringe a apologias teológicas. Em certo se
Darwin, o desgrenhado demônio ateu dos cientistas da criação, forneceu argument
sencialmente do mesmo teor em prol do seu trabalho:

> Dificilmente se pode supor que uma teoria falsa explicaria, de maneira tão satisfatória quanto a teoria da seleção
> as diversas grandes classes de fatos acima especificados. Recentemente observou-se que este não é um método

Em outras palavras, se a seleção natural fosse falsa, pense como seria improvável enc um mundo biológico tão meticulosamente consistente com suas predições!

A contribuição de R.A. Fisher foi tornar o teste de significância uma empreitada fc um sistema pelo qual a significância ou não de um resultado experimental fosse uma qu objetiva. Na forma fisheriana, o teste de significância da hipótese nula tem sido o mé padrão para avaliar resultados de pesquisa científica durante quase um século. Um texto chama o método de "espinha dorsal da pesquisa psicológica".[9] Ele é o padrão pel separamos experimentos entre bem-sucedidos e fracassados. Toda vez que você enc os resultados de uma pesquisa médica, psicológica ou econômica, é provável que lendo alguma coisa que foi verificada por um teste de significância.

Mas o desconforto que Darwin registrou sobre esse "método não seguro de argum de fato nunca diminuiu. Por quase tanto tempo quanto o do método como padrão, há estigmatizando seu erro colossal. Em 1966, o psicólogo David Bakan escreveu sobre a da psicologia", que a seu ver era a "crise da teoria estatística":

> O teste de significância não dá a informação referente aos fenômenos psicológicos caracteristicamente atribuíd … Grande dose de estragos tem sido associada a seu uso. … Dizer isso "em voz alta" é, por assim dizer, assumir da criança que aponta que o rei está na verdade vestido apenas com a roupa de baixo.[10]

E aqui estamos nós, quase cinquenta anos depois, com o rei ainda no poder e exibindo o mesmo traje de aniversário, apesar de o grupo de crianças cada vez maior e clamoroso bradar que ele está quase nu.

## A insignificância da significância

O que há de errado com a significância? Para começar, a palavra em si. A matemátic uma relação engraçada com a língua inglesa. Os artigos de pesquisa em matemática, às para surpresa dos não familiarizados, não são predominantemente compostos de núi e símbolos. A matemática é feita de palavras. Mas os objetos aos quais nos referimos n vezes são entidades não contempladas pelos editores do dicionário de língua inglesa riam-Webster. Coisas novas exigem vocabulário novo. Há dois caminhos a seguir. Po se pinçar palavras novas de um tecido novo, como fazemos quando falamos de co-homo syzygy, monodromia, e assim por diante. Isso tem o efeito de fazer nosso trabalho pa inatingível e proibitivo.

É mais comum adaptarmos para os nossos propósitos palavras já existentes, com em uma semelhança percebida entre o objeto matemático a ser descrito e algo do cha mundo real. Por exemplo, um "grupo", para um matemático, também é um conjur coisas, mas de um *tipo* de grupo muito especial, como o grupo dos números inteiros grupo de simetrias de uma figura geométrica. Nós não nos referimos a um grupo com arbitrária coleção de coisas, como Opep ou Abba, e sim como uma coleção de coisas propriedade de que qualquer par delas possa ser combinado numa terceira, como u de números pode ser somado, ou um par de simetrias que podem ser executadas uma d

referem. Às vezes a linguagem escolhida tem um sabor pastoral: a moderna geon algébrica, por exemplo, é amplamente preocupada com campos, feixes, empilham Outras vezes é mais agressiva – não é incomum falar de um operador matando alg para impressionar mais, aniquilando algo. Uma vez tive uma experiência desagradáve um colega no aeroporto, quando ele fez o comentário, pouco excepcional no cor matemático, de que talvez fosse necessário estourar o plano em certo ponto.

Então, passemos à significância. Em linguagem comum, ela quer dizer algo "importância" ou "significado". Mas o teste de significância que os cientistas usam não a importância. Quando se está testando o efeito de uma nova droga, a hipótese nula não haja efeito nenhum. Então, rejeitar a hipótese nula é apenas julgar que o efeito da é diferente de zero. Mas o efeito poderia ainda ser muito pequeno – tão pequeno que a não é efetiva, num sentido que uma pessoa comum, não matemática, a chamas significativo.

Essa duplicidade léxica de "significância" tem consequências que vão muito alé tornar difíceis de ler os artigos científicos. Em 18 de outubro de 1995, o Comitê de Segu em Medicamentos (CSM, de Committee on Safety of Medicines) do Reino Unido pul uma carta do tipo "Caro médico" para cerca de 200 mil médicos e profissionais de pública por toda a Grã-Bretanha, com um aviso alarmante sobre certas marcas de co ceptivos orais de "terceira geração". "Nova evidência tornou-se disponível", dizia a "indicando que a chance de que ocorra uma trombose numa veia aumenta em tor dobro das vezes para alguns tipos de pílula em comparação com outras."[11] Uma tron na veia não é brincadeira, significa um coágulo impedindo o fluxo de sangue. Se o co se desprende, a corrente sanguínea pode transportá-lo ao longo de todo o caminho pulmão, onde, sob sua nova identidade de embolia pulmonar, pode matar.

A carta para o "Caro médico" assegurava os leitores de que a contracepção era s para a maioria das mulheres, e ninguém deveria parar de tomar a pílula sem recomen médica. Contudo, detalhes como esse são fáceis de se perder quando a mensagem impo é "Pílulas matam". A história que a Associated Press (AP) transmitiu em 19 de outubro basicamente:

> O governo emitiu um alerta, na quinta-feira, de que um novo tipo de pílula de controle de natalidade usado milhão de mulheres britânicas pode causar coágulos sanguíneos. … Ele cogitou a retirada das pílulas, mas deci fazê-lo, em parte porque algumas mulheres não conseguem tolerar outros tipos de pílula.[12]

O público, compreensivelmente, pirou. Uma médica de clínica geral descobriu qu das usuárias da pílula, entre suas pacientes, pararam de tomar os anticoncepcionais[13] que ouviram falar no relatório do governo. Presumivelmente, muitas mulheres tro para outras versões da pílula não causadoras de trombose, mas qualquer interrupção di a eficácia da pílula. Controle de natalidade menos efetivo significa gravidez em m quantidades. (O quê, você achou que eu ia dizer que houve uma onda de abstinência?) sucessivos anos de declínio, a taxa de concepção no Reino Unido saltou diversos p percentuais no ano seguinte. Houve 26 mil bebês a mais concebidos em 1996 na Ingl e no País de Gales que no ano anterior. Uma vez que tantas das gravidezes extras não ha

Esse pode parecer um preço pequeno a ser pago para evitar um coágulo viajando seu sistema circulatório, alimentando danos potencialmente letais. Pense em todas as lheres poupadas da morte por embolia em consequência do alerta do CSM!

Mas a quantas mulheres, exatamente, estamos nos referindo? Não podemos sab certo. No entanto, um cientista que apoiou a decisão do CSM de emitir o alerta diss possivelmente o número total de mortes por embolia prevenidas era "uma".[15] O adicional apresentado pelas pílulas anticoncepcionais de terceira geração, ainda que si cantes no sentido estatístico de Fisher, eram pouco significativos no sentido da saúde pú

A maneira como a história foi apresentada só serviu para aumentar a confusão. O reportou uma *taxa de risco*: pílulas de terceira geração dobravam o risco de trombose a mulher. Isso é bastante ruim, até você se lembrar de que na verdade a trombose é Entre mulheres em idade de procriar usando contraceptivos orais de primeira e seg geração, uma em 7 mil podia sofrer uma trombose. As usuárias da nova pílula tinha fato o dobro do risco, duas em 7 mil. Mas este continua a ser um risco muito pequen razão desse fato matemático certificado: *o dobro de um número minúsculo é um nú minúsculo*. Quanto é bom ou ruim duplicar alguma coisa, isso depende do tamanho i dessa coisa! Formar a palavra jazigo ocupando uma casa de "tríplice valor da palavra" jogo de palavras cruzadas de tabuleiro é uma glória; ocupar a mesma casa com soma desperdício.

Taxas de risco são muito mais fáceis para o cérebro captar que diminutos fragment probabilidade, como uma chance em 7 mil. Mas taxas de risco aplicadas a probabili pequenas podem enganar você facilmente. Um estudo da Universidade da Cidade de York (Cuny)[16] descobriu que crianças cuidadas em lares privados ou por babás tinham taxa de fatalidade sete vezes maior que crianças matriculadas em creches formais entanto, antes de mandar sua babá embora, considere por um minuto que hoje as cri pequenas americanas dificilmente morrem, e quando isso acontece quase nunca é p alguma cuidadora a sacudiu até a morte. A taxa anual de acidentes fatais em lares pri era de 1,6 por 100 mil bebês, bem mais alta, de fato, que a taxa de 0,23 por 100 m creches.[h] Mas ambos os números são mais ou menos zero.

No estudo da Cuny, apenas uma dúzia de bebês por ano morria por acidentes em privados, uma fração mínima das 1.110 crianças americanas que morreram ao tod 2010 (principalmente estranguladas por roupas de cama), ou as 2.063 que morrera Síndrome de Morte Súbita Infantil.[17] Mantendo-se todas as outras variáveis igua resultados do estudo da Cuny fornecem um motivo para preferir as creches forma lares privados. Mas todas as outras coisas geralmente *não* são iguais, e algumas desiguald têm mais importância que outras. E se a encardida creche certificada pela municipal fica duas vezes a distância de sua casa ao questionável lar privado? Acidentes de mataram 79 crianças de colo nos Estados Unidos em 2010. Se o seu bebê acaba pass 20% mais tempo na estrada por ano por causa da locomoção mais demorada, você po apagado qualquer possível vantagem que obteve escolhendo a creche formal mais esp lizada.

Um teste de significância é um instrumento científico, e, como qualquer outro, tem

população estudada, por exemplo –, se habilita a ver efeitos cada vez menores. Ess poder do método, mas também seu perigo. A verdade é que a hipótese nula, se a toma ao pé da letra, é quase sempre falsa. Quando se injeta uma droga poderosa na co sanguínea de um paciente, é difícil acreditar que a intervenção tenha efeito *exatament* sobre o risco de que o paciente desenvolva câncer no esôfago, ou trombose, ou prob respiratórios. Cada parte do corpo conversa com a outra, num complexo laço de fee de influência e controle.

Tudo que você faz lhe dá câncer ou o previne. Em princípio, se você realiza um e suficientemente abrangente, pode descobrir qual o efeito. Mas esses efeitos em geral sã minúsculos que podem ser ignorados com segurança. O simples fato de detectá-los sempre quer dizer que eles tenham importância.

Como seria bom se pudéssemos voltar no tempo para os primórdios da nomenc estatística e declarar que um resultado que passasse pelo teste de Fisher com valor-*p* in a 0,05 era "estatisticamente perceptível" ou "estatisticamente detectável", em vez de "es ticamente significativo"! Isso seria mais verdadeiro com referência ao sentido do mé que apenas nos aconselha acerca da existência de um efeito, porém silencia quanto tamanho e importância. Mas é tarde demais para isso. Nós temos a linguagem que ter

## O mito do mito da "mão quente"

Nós conhecemos B.F. Skinner como psicólogo, sob muitos aspectos *o* psicólogo mode homem que enfrentou os freudianos e liderou uma corrente de psicologia, o behavio (ou comportamentalismo), preocupada apenas com o que era visível e o que pod mensurado, sem a necessidade de hipóteses sobre o inconsciente ou as motivações cientes. Para Skinner, uma teoria da mente era *apenas* uma teoria do comportame portanto os projetos interessantes para os psicólogos não diziam respeito a pensament sentimentos, e sim à manipulação do comportamento por meio de reforço.

Menos conhecida é a história de Skinner como romancista frustrado.[18] Ele estudou no Hamilton College e passava grande parte de seu tempo com Percy Saunders, es professor de química cuja casa era uma espécie de salão literário. Skinner lia Ezra P escutava Schubert e escrevia acalorados poemas adolescentes ("À noite, ele para, ofeg Murmurando para sua consorte terrena/'o amor me exaure!'"[19]) para a revista literá faculdade. Depois de formado, frequentou a conferência de escritores Bread Loaf, esc "uma peça em um ato sobre um curandeiro que mudava a personalidade das pesso conseguiu empurrar vários de seus contos para Robert Frost. Este escreveu a Skinne carta muito satisfatória elogiando suas histórias e aconselhando: "Tudo que o escritor a habilidade de escrever forte e diretamente a partir de uma ideia pessoal precon inexplicável e quase invencível. … Presumo que todo mundo tem a ideia preconce passa algum tempo com ela até falar e escrever a partir dela. Mas a maioria das pe acaba como começa, externalizando ideias preconcebidas de outras pessoas."[21]

Assim incentivado, Skinner mudou para o sótão da casa de seus pais em Scranto

sua ideia preconcebida, ou, tendo-a encontrado, colocá-la em forma literária. Sua fa: Scranton não deu em nada. Conseguiu escrever um par de histórias e um soneto sc líder trabalhista John Mitchell, mas passava o tempo sobretudo construindo miniatu navios e sintonizando sinais distantes de Pittsburgh e Nova York no rádio – na époc mecanismo de procrastinação novinho em folha.

"Uma reação violenta contra tudo que era literário estava se instalando",[22] escrev sobre esse período. "Fracassei como escritor porque não tinha nada importante a dize não podia aceitar essa explicação. Era a literatura que devia estar em falta." Ou, de f mais franca: "A literatura deve ser demolida."[23]

Skinner era leitor regular da revista literária *The Dial*; em suas páginas entrou em cc com os escritos literários de Bertrand Russell e, via Russell, foi conduzido a John Wats primeiro grande defensor da concepção behaviorista que em breve viria a se tornar pr mente sinônimo de Skinner. Watson sustentava que a atividade dos cientistas era obs os resultados de experimentos, e só. Não havia lugar para hipóteses sobre consciêr almas. "Ninguém jamais tocou uma alma ou viu alguma alma num tubo de ensaio",[24] c que teria escrito, numa forma de menosprezar essa noção. Essas palavras intransig devem ter feito Skinner vibrar, pois ele se mudou para Harvard como aluno de graduação em psicologia, preparando-se para banir o eu vago e indisciplinado do e científico do comportamento.

Skinner tinha ficado muito impressionado com uma experiência de produção v espontânea que vivenciara em seu laboratório. Uma máquina ao fundo emitia um rítmico, repetitivo, e Skinner viu-se falando junto com ela, acompanhando a batida, tindo silenciosamente a frase: "Você nunca vai sair, você nunca vai sair, você nun sair."[25] O que parecia uma fala, ou mesmo, de maneira limitada, poesia, na verdac resultado de uma espécie de processo verbal autônomo, que não requeria nada par com um autor consciente.[j] Isso forneceu exatamente a ideia de que Skinner precisava ficar livre da obrigação com a literatura. E se a linguagem, mesmo a linguagem dos gr poetas, fosse apenas outro comportamento treinado por exposição a estímulos e manip em laboratório?

Na faculdade, Skinner havia escrito imitações dos sonetos de Shakespeare. Ele desc retrospectivamente a experiência, na meticulosa maneira behaviorista, como "o est excitamento de emitir linhas inteiras já prontas, com métrica e rimas apropriadas".[26] A como jovem professor de psicologia em Minnesota, ele próprio remodelou Shakes mais emissor que escritor. Essa abordagem não era tão louca quanto parece agora. A f dominante de crítica literária na época, "a leitura meticulosa", trazia a marca da filoso Watson, exatamente como Skinner, exibindo uma preferência bastante behaviorista palavras na página, em detrimento das intenções não observáveis do autor.[27]

Shakespeare é famoso como mestre do verso aliterativo, no qual várias palavra estreita sucessão começam com o mesmo som ("Full fathom five thy father lies…"). Skinner, esse argumento, por exemplo, não era ciência. Shakespeare aliterava? Em afirmativo, a matemática podia provar isso. "A comprovação de que existe um pro responsável pelo padrão aliterativo", escreveu ele, "pode ser obtida apenas mediante

análise estatística de todos os arranjos de consoantes iniciais numa amostra razoavelı grande."[28] E que forma de análise estatística? Nenhuma outra além de uma forma dc de valor-*p* de Fisher.

Aqui, a hipótese nula é de que Shakespeare não prestava a menor atenção aos sons ir das palavras, de modo que a primeira letra de uma palavra da poesia não tem efeito neı sobre as outras palavras do mesmo verso. O protocolo era muito parecido com o d teste clínico, mas com uma grande diferença: o pesquisador biomédico que testa uma espera de todo o coração ver a hipótese nula refutada e a eficácia do remédio demons Para Skinner, visando a derrubar a crítica literária de seu pedestal, a hipótese nula alternativa atraente.

Pela hipótese nula, a frequência com que os sons iniciais apareciam múltiplas vez mesmo verso ficaria inalterada se as palavras fossem postas num saco, sacudidas e espal de novo em ordem aleatória. E foi exatamente isso que Skinner encontrou em sua am de uma centena de sonetos. Shakespeare fracassou no teste de significância. Skinner escı

> Apesar da aparente riqueza de aliteração nos sonetos, não há evidência significativa de um processo de aliter comportamento do poeta ao qual se deva dar séria atenção. No que se refere a esse aspecto da poesia, Shak poderia muito bem ter tirado as palavras de uma cartola.[29]

"Aparente riqueza", que atrevimento! Isso capta à perfeição o espírito da psicologi Skinner queria criar. Onde Freud havia alegado ver o que estava antes oculto, reprimi obscurecido, Skinner queria fazer o contrário, negar a existência do que parecia estaı diante da nossa vista.

Mas Skinner estava errado. Ele não tinha provado que Shakespeare não aliterava teste de significância é um instrumento, como o telescópio, e alguns instrumentos sãc poderosos que outros. Se você olha Marte com um telescópio com ampliação para pes você vê luas. Se você olha com um binóculo, não as vê. Mas as luas continuam lá aliteração de Shakespeare continua lá. Conforme documentado por historiadores da l tura,[30] esse era um artifício-padrão na época, conhecido e conscientemente implantad quase todo mundo que escrevia em inglês.

O que Skinner havia provado é que a aliteração de Shakespeare não produzia um ex de sons repetidos tão grande a ponto de aparecer em seu teste. Mas por que haveria d O uso da aliteração em poesia é tanto positiva quanto negativa; em certos lugares, alit para criar um efeito; em outros, a aliteração é evitada, para não criar um efeito que voc quer. Pode acontecer que a tendência geral seja aumentar o número de versos alitera mas, mesmo assim, o aumento deve ser pequeno. Encha seus sonetos de uma ou aliterações a mais em cada um, e você vira um dos poetas trapalhões ridicularizado colega elisabetano de Shakespeare, George Gascoigne: "Muitos escritores recorrem à tição de palavras começando com a mesma letra, a qual (sendo modestamente u empresta graça a um verso; mas eles o fazem de modo a caçar uma letra até a morte, a torna *crambe*, e *Crambe bis positum mors est*."[31]

A frase em latim significa: "Repolho servido duas vezes é morte." A redaçã Shakespeare é rica em efeito, mas sempre contida. Ele jamais empacotaria tanto repc

Um estudo estatístico que não seja refinado o suficiente para detectar um fenôme tamanho esperado é chamado *estudo de baixa potência* – o equivalente a olhar os pla com binóculo. Haja luas ou não, o resultado é o mesmo, então, nem precisava incomodado. Você não manda um binóculo fazer o serviço de um telescópio. O prol da baixa potência é o reverso da medalha do problema gerado com o susto do contr natalidade britânico. Um estudo de alta potência, como o experimento com os contra vos, pode nos levar a estourar uma veia por causa de um efeito pequeno que na verdad é importante. Um estudo de baixa potência pode nos levar a desconsiderar erronea um efeito pequeno que o método simplesmente foi fraco demais para ver.

Consideremos Spike Albrecht, o ala calouro do time masculino de basquet Wolverines, da Universidade de Michigan, com apenas 1,80 metro de altura, e que fic banco a maior parte da temporada. Ninguém esperava que ele desempenhasse algum importante quando os Wolverines enfrentaram os Cardinals de Louisville na final da N de 2013. Mas Albrecht converteu cinco arremessos seguidos, quatro deles de três p num intervalo de dez minutos, no primeiro tempo, levando o Michigan a uma vantag dez pontos sobre os superfavoritos Cardinals. Ele teve o que os aficionados do bas chamam de "mão quente" – a aparente incapacidade de errar um arremesso, não im de que distância ou da marcação feroz da defesa.

Exceto que supostamente não existe tal coisa. Em 1985, num dos artigos acadê contemporâneos mais famosos em psicologia cognitiva,[32] Thomas Gilovich, Robert V e Amos Tversky (doravante GVT) fizeram para os fãs de basquete o que B.F. Skinner para os amantes do Bardo. Conseguiram os registros de cada arremesso da temp 1980-81 dos Philadelphia 76ers em todos os seus 48 jogos em casa e os analisaram est camente. Se os jogadores tendessem a uma sequência "quente" ou a uma sequência seria de esperar que eles tivessem maior propensão a acertar um arremesso após ter co tido uma cesta do que acertá-lo depois de um erro. E quando GVT fizeram um levantar entre os fãs da NBA, descobriram que essa teoria tinha amplo apoio: nove entre d concordavam que um jogador tem mais probabilidade de encestar quando acab converter duas ou três cestas seguidas.

Mas nada do tipo estava ocorrendo na Filadélfia. Julius Erving, o grande Dr. J, ac 52% no total. Após três cestas seguidas, situação que poderia indicar que Erving estav a mão quente, sua porcentagem caía para 48%. E, após três erros consecutivos, sua po tagem de arremessos de quadra não caía, mas continuava em 52%. Para outros joga como Darryl "Chocolate Thunder" Dawkins, o efeito era ainda mais acentuado. Após encestada, sua porcentagem total de 62% caía para 57%; após um arremesso errado, para 73%, exatamente o contrário da predição dos fãs. (Uma explicação possíve arremesso errado sugere que Dawkins estava enfrentando defensores eficientes no pe tro, que o induziam a subir para a cesta e fazer uma daquelas suas enterradas de dest tabela, aliás, sua marca registrada, às quais ele dava nomes como "Na sua cara, a des ou "Turbo sexofônico deleite".)

Será que isso significa que não existe algo como a "mão quente"? Calma aí. A mão q em geral não é considerada uma tendência universal de encestadas após encestadas e

basquete que habita o corpo de um jogador por breve e glorioso intervalo na quadra dar aviso de chegada ou partida. Spike Albrecht é Ray Allen por dez minutos, conver implacavelmente cestas de três pontos, e aí volta a ser Spike Albrecht. Será que um estatístico consegue ver isso? A princípio, por que não? GVT divisaram um meio inteli de verificar esses breves intervalos de impossibilidade de ser contido. Decompuser temporada de cada jogador em sequências de quatro arremessos cada. Assim, se a sequ de cestas (C) e erros (E) de Dr. J era

CECCCECEECCCCEEC,

as sequências seriam

CECC, CECE, ECCC, CEEC …

GVT então contaram quantas sequências eram "boas" (três ou quatro ce "moderadas" (duas cestas) ou "ruins" (zero ou uma cesta) para cada um dos nove joga do estudo. E então, bons fisherianos que eram, consideraram os resultados da hipótes – de que não existe uma coisa do tipo mão quente.

Há dezesseis sequências possíveis de quatro arremessos: o primeiro pode ser C o para cada uma dessas opções há duas possibilidades para o segundo arremesso, dand ao todo quatro opções para os dois primeiros arremessos (aí vão elas: CC, CE, EC, EE) e cada uma *dessas* quatro há duas possibilidades para o terceiro, dando oito sequê possíveis de três arremessos, e duplicando mais uma vez, para considerar o quarto arrer da sequência, e obtemos dezesseis. Aí estão todas, divididas em sequências boas, mode e ruins:

Boas: CCCC, ECCC, CECC, CCEC, CCCE
Moderadas: CCEE, CECE, CEEC, ECCE, ECEC, EECC
Ruins: CEEE, ECEE, EECE, EEEC, EEEE

Para um arremessador de 50%, como Dr. J, todas as dezesseis sequências pos deveriam ser igualmente prováveis, porque cada arremesso tem igual probabilidade C ou E. Então, seria de esperar que $5/16$ ou 31,25% das sequências de quatro arremess Dr. J fossem boas, com 37,5% moderadas e 31,25% ruins.

Mas se Dr. J às vezes experimentasse a mão quente, seria de esperar uma proporçã alta de sequências boas, com a contribuição daqueles jogos em que ele simplesmente p não errar. Quanto mais propenso a sequências quentes ou frias você está, mais voc CCCC e EEEE, e menos CECE.

O teste de significância nos pede para formular a seguinte pergunta: se a hipótes estivesse correta e não houvesse mão quente, seria improvável que víssemos os resul efetivamente observados? Acontece que a resposta é não. A proporção de sequências ruins e moderadas nos dados reais é justamente em torno do que o acaso prediria

"Se os presentes resultados são surpreendentes", escrevem GVT, "é por causa da rob com que a crença errônea na 'mão quente' é defendida por observadores experientes e informados." De fato, enquanto o resultado era considerado sabedoria convenciona psicólogos e economistas, ele demorou para deslanchar no mundo do basquete. Iss perturbou Tversky, que gostava de uma boa briga, qualquer que fosse o resultad participei de mil discussões sobre esse tema", ele dizia. "Ganhei todas e não con ninguém."

Mas GVT, como Skinner, antes, haviam respondido só metade da pergunta. Ou sej a hipótese nula é verdadeira e não existe algo como mão quente? Então, como eles der tram, os resultados teriam um aspecto muito semelhante aos observados nos dados re

No entanto, e se a hipótese nula estiver errada? A mão quente, se existir, é brev efeito, em termos estritamente numéricos, é pequeno. O pior arremessador na liga a 40% de seus lances, e o melhor acerta 60%. Essa é uma diferença grande em term basquete, mas não tão grande estatisticamente. Como seriam as sequências de arrem se a mão quente fosse real?

Os cientistas da computação Kevin Korb e Michael Stillwell[33] calcularam exatament num artigo escrito em 2003. Eles geraram simulações com a mão quente embut porcentagem de arremessos certos do jogador simulado saltou para até 90%, conside dois intervalos "quentes" de dez arremessos no decorrer do experimento. Em mais dessas simulações, o teste de significância usado por GVT informou que não havia m para rejeitar a hipótese nula – *mesmo que a hipótese nula fosse completamente falsa*. O p de GVT era de baixa potência, destinado a informar a inexistência da mão quente m que ela fosse real.

Se você não gosta de simulações, considere a realidade. Nem todos os times são quando se trata de impedir arremessos. Na temporada 2012-13, o mediano time dos In Pacers permitiu aos adversários converter apenas 42% dos arremessos, enquanto 4 foram encestados contra os Cleveland Cavaliers. Então os jogadores realmente têm "fe quentes" de um tipo bastante previsível: apresentam maior propensão a acertar um arre quando jogam contra os Cavs. Mas esse calor morno – talvez devêssemos chamar de morna" – é algo que os testes usados por Gilovich, Vallone e Tversky não são sensí bastante para perceber.

A PERGUNTA CORRETA a fazer não é "Será que jogadores de basquete às vezes melhora pioram temporariamente na conversão de arremessos?" – o tipo de pergunta sin abordado por um teste de significância. A pergunta certa é "*Quanto* sua habilidade com o tempo, e em que medida os observadores podem detectar em tempo real s jogador está quente?". Aqui, a resposta seguramente é "Não tanto quanto as pessoas pe realmente muito pouco." Um estudo recente descobriu que jogadores que convert primeiro de dois lances livres se tornam ligeiramente mais propensos[34] a converter o livre seguinte, mas não existe evidência convincente sustentando a mão quente num em tempo real, a não ser que você leve em conta as impressões subjetivas de jogad

corretos em sua alegação central de que os seres humanos são rápidos em perceber pa onde eles não existem e em superestimar sua força onde existem. Qualquer espectadc fique observando o aro perceberá rotineiramente um ou outro jogador enfiar cinco seguidas. A maior parte do tempo, isso se deve a alguma combinação de defesa indife escolha inteligente de arremessos ou, o mais provável, pura sorte, e não a um sur transcendência basquetebolística. Isso significa que não há razão para esperar que um s que acabou de fazer cinco cestas seguidas tenha alguma probabilidade especial de f próxima.

Analisar a performance de consultores de investimentos apresenta o mesmo prob Se existe algo como talento para investir, ou se as diferenças de performance entre di fundos devem-se totalmente ao acaso, essa tem sido uma questão controversa, som não resolvida durante anos.[35] Mas se há investidores com mão quente temporár permanente, eles são raros, tão raros que fazem pouca ou nenhuma diferença no ti estatística contemplada por GVT. Se pegarmos um fundo que venceu o mercado cinc seguidos, é bem mais provável que tenha tido sorte do que seja bom. A performance pa não é garantia de retornos futuros. Se os fãs de Michigan estavam contando com Albrecht para carregar o time a fim de ganhar o campeonato, ficaram terrivelmente pontados. Albrecht errou todos os arremessos que fez no segundo tempo, e os Wolv acabaram perdendo por seis pontos.

Um estudo de John Huizinga e Sandy Weil,[36] realizado em 2009, sugere que poder boa ideia os jogadores não acreditarem na mão quente, mesmo que ela exista! Num con de dados muito maior que o de GVT, eles descobriram um efeito similar. Depois de uma cesta, os jogadores tinham menos probabilidade de acertar o arremesso seguinte Huizinga e Weil tinham registros não só de arremessos certeiros, mas do local de ond foram feitos. *Esses* dados mostraram uma espantosa explicação em potencial: jogadore tinham acabado de fazer uma cesta apresentavam maior probabilidade de tentar um messo mais difícil na jogada seguinte.

Yigal Attali, em 2013, encontrou resultados ainda mais intrigantes nessa mesma li Um jogador que tinha acabado de fazer uma bandeja não apresentava maior proper fazer um arremesso de longe do que um jogador que acabou de perder uma ba Bandejas são fáceis e não deveriam dar ao jogador uma sensação firme de estar com a quente. No entanto, o jogador tem propensão muito maior a tentar um arremesso de depois de uma cesta de três pontos do que depois de errar um lance de três. Em o palavras, a mão quente poderia "se cancelar" – os jogadores, acreditando-se quentes, ga confiança exagerada e tentam fazer arremessos que não deveriam tentar.

A natureza do fenômeno análogo no investimento em ações fica como exercício p leitor.

---

[a] Há uma controvérsia duradoura e profundamente sem importância sobre se o termo "número natural" dev definido de modo a incluir ou não o zero. Sinta-se livre para fingir que eu não disse "0", se você for um anti obstinado.

[b] Você poderia objetar aqui que os métodos de Fisher são *estatística*, não *matemática*. Eu sou filho de dois estatístic

[c] Arbuthnot via na propensão a um ligeiro excesso de meninos como um argumento em si a favor da Providência: ou Alguém devia ter ajustado o relógio exatamente de modo a criar bebês meninos adicionais para compensar os l adultos mortos em guerras e acidentes.

[d] Abordaremos este argumento mais detalhadamente no Capítulo 9.

[e] A definição matemática verdadeira de "grupo" tem ainda muito mais que isso – no entanto, infelizmente, essa bela história que vai ter de ficar pela metade.

[f] Cabe lembrar que no Reino Unido o aborto é permitido por lei, sendo portanto realizado pelas vias oficiais e contal nas estatísticas oficiais. (N.T.)

[g] O autor refere-se aqui a *in-home day-care* e *day-care centers*. O primeiro termo refere-se a casas de família com auto para estabelecer "lares para cuidar das crianças", sem maiores pretensões educacionais. O segundo termo refe: creches formais, públicas ou privadas, que, além dos cuidados, oferecem também propostas educacionais. (N.T.)

[h] O artigo não aborda a interessante questão de quais são as taxas correspondentes para crianças sob os cuida próprios pais.

[i] Nem todo mundo tem a linguagem que temos, claro. Os estatísticos chineses usam 显著 (*xianzhu*) para significâ sentido estatístico, que é mais próximo de "perceptível" – mas meus amigos que falam chinês me dizem que a carrega uma conotação de importância, como *significance* em inglês [e "significância" em português]. Em russo, estatístico para significância é значимый, mas o modo mais típico de exprimir o sentido em inglês de *sig* [significativo] seria значительный.

[j] Conta-se que David Byrne escreveu a letra de "Burning down the house" de modo muito similar, vociferando sílal sentido, no ritmo da música instrumental, e depois voltando para anotar as palavras que as sílabas absurdas o lembrar.

[k] NCAA: National College Athletic Association, a entidade que administra o esporte universitário nos Estados (N.T.)

# 8. *Reductio ad* improvável

O PONTO FILOSÓFICO mais pegajoso no teste de significância vem logo no começo, an
executarmos qualquer dos sofisticados algoritmos desenvolvidos por Fisher e aprimo
por seus sucessores. Está bem ali no começo do segundo passo:

"Suponha que a hipótese nula seja verdadeira."

Mas o que tentamos provar, na maioria dos casos, é que a hipótese nula *não é* verda
A droga funciona, Shakespeare alitera, a Torá prediz o futuro. Parece muito suspei
ponto de vista lógico assumir exatamente o que tentamos refutar, como se estivéss
correndo o perigo de recair num argumento circular.

A essa altura, pode ficar descansado. Assumir a verdade de algo que, secretan
acreditamos ser falso é um método de argumentação consagrado ao longo dos século
remonta aos tempos de Aristóteles. É a prova por contradição, ou *reductio ad absurdı*
*reductio* é um tipo de judô matemático no qual primeiro afirmamos o que desej
eventualmente negar, como um plano de levantá-lo sobre os ombros e derrotá-lo pc
própria força. Se uma hipótese implica falsidade,[a] então a hipótese deve ser falsa. O pl
o seguinte:

- Suponha que a hipótese H seja verdadeira.
- Segue-se de H que um certo fato F não pode ocorrer.
- Mas F ocorre.
- Portanto, H é falsa.

Digamos que alguém declare que duzentas crianças foram mortas a tiros no distrit
Columbia em 2012. Essa é uma hipótese. Mas ela pode ser um tanto difícil de checar
(lembro que digitei "número de crianças mortas por armas em DC em 2012" no Goo
não encontrei a resposta de imediato). Por outro lado, se assumimos que a hipótese es
correta, então não pode haver menos de duzentos homicídios em DC em 2012. Mas *h*
menos. Na verdade, houve 88.[1] Então, a hipótese da pessoa que fez a declaração deve
errada. Aqui não há circularidade, nós "assumimos" a hipótese falsa numa espécie de
caminho tentativo, exploratório, estabelecendo o mundo mental contrafatual no qual
assim, e aí a observamos desabar sob a pressão da realidade.

Formulada dessa maneira, a *reductio* parece quase trivial, e num certo sentido é m
Talvez seja mais correto dizer que ela é uma ferramenta mental à qual de tal mod

*reductio* que leva à prova pitagórica da irracionalidade da raiz quadrada de 2; aquela tão desafiadora dos paradigmas que tiveram de matar seu autor; uma prova tão sir refinada e compacta que se possa escrevê-la toda numa página.

Suponha:

H: a raiz quadrada de 2 é um número racional,

ou seja, $\sqrt{2}$ é uma fração $m/n$ onde *m* e *n* são números inteiros. Podemos muito bem esc essa fração em seus *termos mais reduzidos*, o que significa que, se houver um fator co entre o numerador e o denominador, dividimos ambos por esse fator, deixando a f inalterada. Não há motivo para escrever $10/14$ em vez da forma simplificada $5/7$. Então, v reformular a hipótese:

H: a raiz quadrada de 2 é igual a $m/n$, onde *m* e *n* são números inteiros sem fator coı

Na verdade, isso significa que podemos ter certeza de que *m* e *n* não são ambos pois dizer que ambos são pares é exatamente o mesmo que dizer que ambos têm 2 fator. Nesse caso, como no de $10/14$, poderíamos dividir numerador e denominador por alterar a fração, o que equivale a dizer que ela afinal não estava nos termos mais redu: Então

F: *m* e *n* são ambos pares

é falso.

Agora, como $\sqrt{2} = m/n$, então quando elevamos ambos os membros ao quadrado v que $2 = m^2/n^2$, ou, de modo equivalente, $2n^2 = m^2$. Logo $m^2$ é um número par, o que sig que o próprio *m* é par. Um número é par quando pode ser escrito como o dobro d número inteiro. Assim, podemos escrever, e escrevemos, *m* como $2k$, para algum nú inteiro *k*. O que significa que $2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Dividindo ambos os membros p descobrimos que $n^2 = 2k^2$.

Qual o sentido de toda essa álgebra? Simplesmente mostrar que $n^2$ é o dobro de portanto que é um número par. Mas se $n^2$ é par, então *n* também deve ser, exatamente *m*. Mas isso significa que F é verdadeiro! Assumindo H, chegamos a uma falsidade, até absurdo: F é falso e verdadeiro ao mesmo tempo. Então H deve ter estado errada. quadrada de 2 *não* é um número racional. Assumindo que fosse, provamos que nã Esse é um truque realmente esquisito, mas funciona.

Você pode pensar o teste de significância da hipótese nula como uma espécie de v diluída da *reductio*:

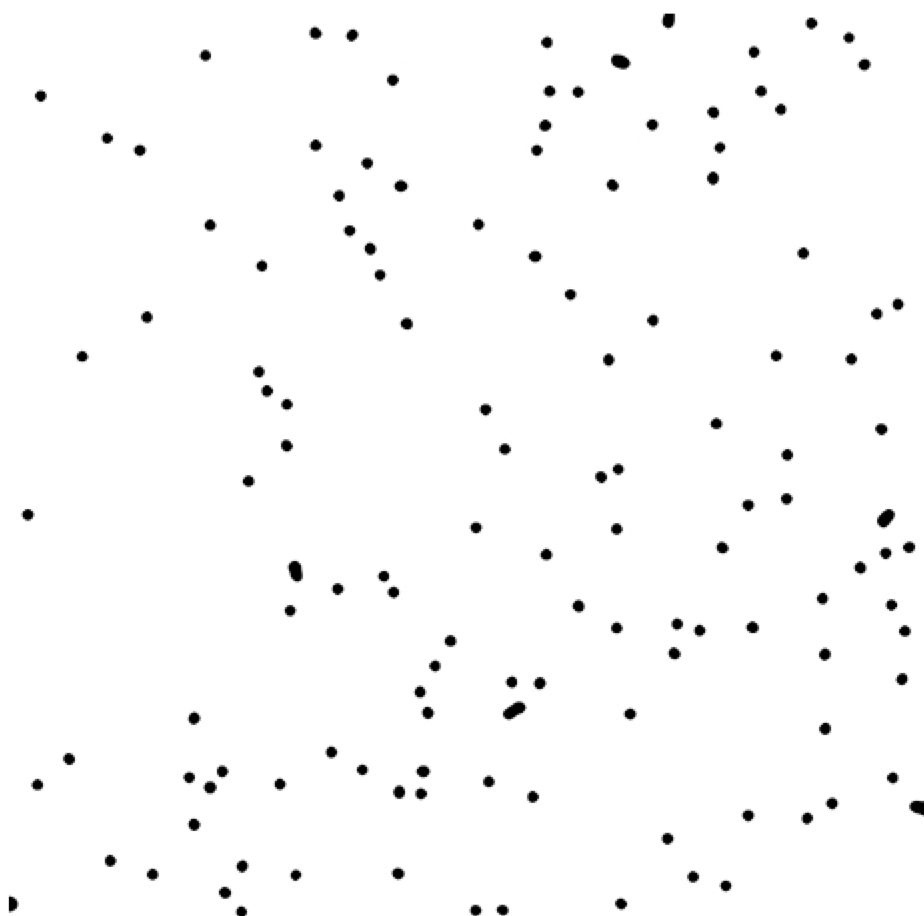
- Suponha que a hipótese nula H seja verdadeira.
- Segue-se de H que um certo resultado R é muito improvável (digamos, menos limiar de Fisher, de 0,05).

- Portanto, H é muito improvável.

Essa não é uma *reductio ad absurdum*, em outras palavras, mas uma *reductio ad* improvável.

Um exemplo clássico vem de John Michell, sacerdote e astrônomo do século XVII dos primeiros a levar a abordagem estatística para o estudo dos corpos celestes.[2] O agl rado de estrelas tênues numa das extremidades da constelação de Touro tem sido obse por praticamente todas as civilizações. Os Navajo as chamam Dilyehe, "A figura cintil os Maori as chamam Matariki, "Os olhos de deus". Para os romanos antigos, tratava- um punhado de uvas, em japonês são Subaru (aí você já sabe o porquê do logo d estrelas da fabricante de carros). Nós as chamamos Plêiades.

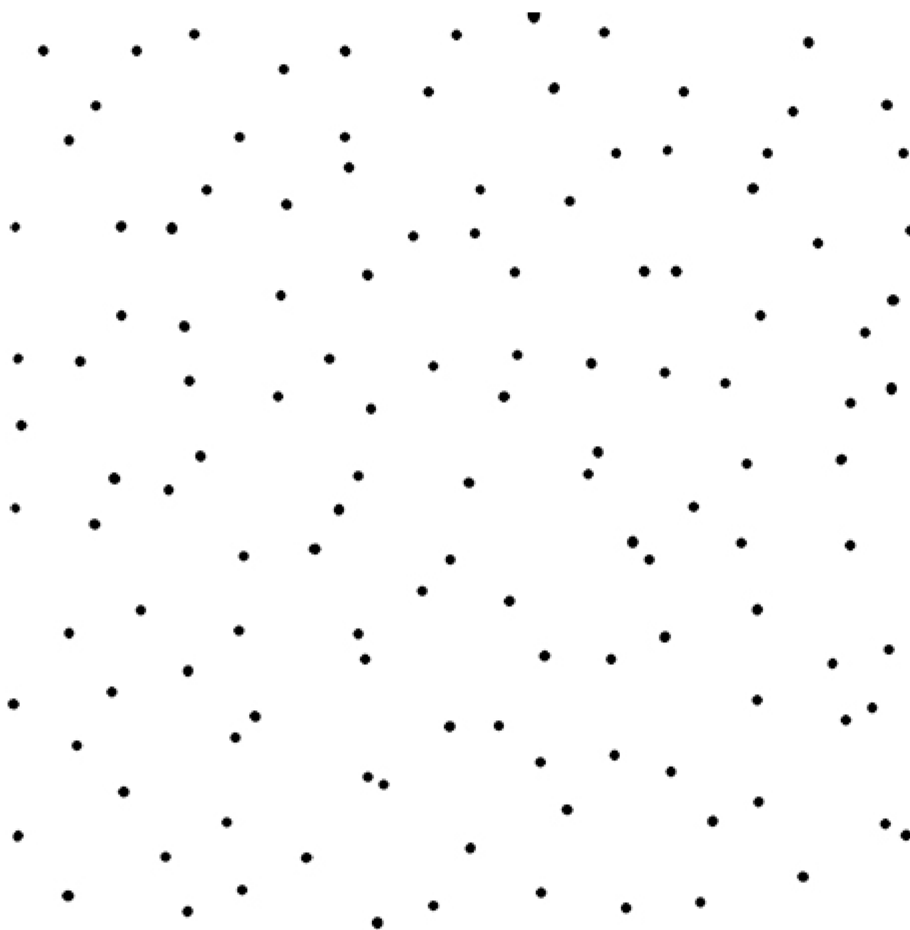
Todos esses séculos de observação e formação de mitos não conseguiram respor pergunta científica fundamental em relação às Plêiades: esse aglomerado é realment aglomerado? Ou estarão as seis estrelas separadas por distâncias inimagináveis, mas a jadas por acaso, quase exatamente na mesma direção relativa à Terra? Pontos de luz, disp ao acaso no nosso campo de visão, têm mais ou menos o seguinte aspecto:



Você vê amontoados, certo? Isso é de esperar. Haverá inevitavelmente alguns grup estrelas que se juntam quase uma em cima da outra, por simples casualidade. Como pod ter certeza de que não é isso que está ocorrendo com as Plêiades? É o mesmo fenômen

Gilovich, Vallone e Tversky ressaltaram: um armador perfeitamente consistente, qu
costuma ter sequências quentes nem sofrer baixas súbitas, poderá, mesmo assim, às
acertar cinco arremessos seguidos.

Na verdade, se não houvesse grandes aglomerados visíveis de estrelas, como nesta f



*isso por si só* seria evidência do funcionamento de algum processo não aleatório. A seg
figura pode parecer "mais aleatória" a olho nu, mas não é. Ela atesta que aqui os pontc
têm uma tendência intrínseca a se aglomerar.[3]

Assim, a mera presença de um aparente aglomerado não deveria nos convencer d
as estrelas em questão estejam realmente amontoadas no espaço. Por outro lado, pc
haver um grupo de estrelas no céu tão espremido que nos levasse a duvidar se isso
acontecido por acaso. Michell mostrou que, se as estrelas visíveis estivessem disp
aleatoriamente pelo espaço, a chance de seis delas se arranjarem de modo tão ord
ponto de apresentar aos nossos olhos o aglomerado de Plêiades era de fato pequena –
de uma em 500 mil, pelos seus cálculos. Mas lá estão elas acima de nós, como um
apertado de uvas. Só um tolo, concluiu Michell, poderia acreditar que isso acontece
acaso.

Fisher escreveu sobre o trabalho de Michell em tom de aprovação, deixando explí
analogia que via entre o argumento de Michell e a *reductio* clássica: "A força sobre a
essa conclusão se apoia é logicamente aquela de uma simples disjunção: ou uma cl
excepcionalmente rara aconteceu ou a teoria da distribuição aleatória não é válida."[4]

O argumento é convincente, e suas conclusões corretas: as Plêiades de fato não sãc coincidência ótica, mas um aglomerado real – de várias centenas de estrelas adolescer não só das seis visíveis ao olho. O fato de vermos aglomerados de estrelas muito esprer como as Plêiades, mais espremidos do que seria provável por acaso, é uma boa evidên que as estrelas não estão dispostas aleatoriamente, e sim juntadas por algum fenômeno real lá fora, no espaço.

Mas aí vem a má notícia: a *reductio ad* improvável, ao contrário de sua anc aristotélica, em geral não é logicamente sólida. Ela nos leva a seus próprios absurdos. J Berkson,[5] por muito tempo chefe da divisão de estatísticas médicas da Clínica Mayc cultivava (e alardeava sonoramente) um vigoroso ceticismo acerca de metodologias q julgava duvidosas, ofereceu um exemplo famoso demonstrando as armadilhas do mét

Suponha que você tenha um grupo de cinquenta sujeitos experimentais, com a hip (H) de que sejam seres humanos. Você observa (O) que um deles é albino. O albinis extremamente raro, afetando não mais que uma em 20 mil pessoas. Logo, dado que H correta, a chance de encontrar um albino entre os seus cinquenta sujeitos é bastante peq menos de 1 em 400,[b] ou 0,0025. Assim, o valor-*p*, a probabilidade de observar O, dad muito inferior a 0,05.

Somos inexoravelmente levados a concluir, com alto grau de confiança estatística, é incorreta: os sujeitos na amostra não são seres humanos.

É tentador pensar em "muito improvável" como significando "essencialmente impos e, a partir daí, proferir a palavra "essencialmente" cada vez mais baixo com a noss mental, até pararmos de prestar atenção nela.[c] Mas impossível e improvável não são a m coisa – nem são coisas próximas. Coisas impossíveis jamais acontecem. Coisas improv acontecem um bocado. Isso significa que estamos numa posição lógica muito ins quando tentamos fazer inferências a partir de uma observação improvável, como a *re ad* improvável nos pede. Aquela vez em que o conjunto 4, 21, 23, 34, 39 da loteria da Ca do Norte saiu duas vezes na mesma semana suscitou um monte de perguntas. Havia al errado no jogo? Mas cada combinação de números tem exatamente a mesma probabil de sair que qualquer outra.

Os números 4, 21, 23, 34, 39, saindo como resultado na terça-feira, e os números 1 18, 22, 39, saindo como resultado na quinta, representam algo tão improvável de aco quanto o que realmente ocorreu – há apenas uma chance em 300 bilhões, ou algo ass saírem esses números nos sorteios dos dois dias. Na verdade, *qualquer* resultado part de sorteios de loteria tem uma chance em 300 bilhões. Se você tende a adotar o por vista de que um resultado altamente improvável leva-o a questionar a honestidade do você deve ser aquela pessoa que manda um e-mail zangado para o encarregado da l toda quinta-feira, não importa quais bolas numeradas saiam da gaiola.

Não seja essa pessoa.

## Aglomerados de primos e a estrutura da desestrutura

O insight crítico de Michell, de que aglomerados de estrelas poderiam aparecer aos n
olhos mesmo que elas estivessem distribuídas aleatoriamente pelo nosso campo de
não se aplica somente à esfera celeste. Esse fenômeno foi o ponto de partida do epis
piloto do drama matemático-policial *Numb3rs*.[d] Uma série de ataques sinistros, mar
por pinos no mapa de parede do quartel-general, não mostrava aglomerados. Logo, e
em ação um único assassino em série muito astuto, que deixava intencionalmente um e
entre as vítimas, e não um surto de assassinos psicóticos sem conexão entre si. Isso er
tanto forçado como história policial, porém, matematicamente, estava correto.

O surgimento de aglomerados em dados aleatórios proporciona compreensão m
em situações em que não há nenhuma aleatoriedade real, como o comportament
números primos. Em 2013, Yitang "Tom" Zhang,[6] popular professor de matemáti
Universidade de New Hampshire (UNH), estarreceu o mundo da matemática pu
anunciar que havia provado a conjectura dos "intervalos limitados" acerca da distrib
dos números primos. Zhang havia sido aluno brilhante da Universidade de Beijing
nunca progrediu depois de se mudar para obter o doutorado nos Estados Unidos, na d
de 1980. Não havia publicado um só artigo acadêmico desde 2001. A certa altura, aband
inteiramente a matemática acadêmica para vender sanduíches na Subway, até que u
colega de Beijing o localizou e o ajudou a obter um emprego de professor convida
UNH. Pela aparência exterior, ele estava acabado. Assim, foi uma grande surpresa qu
publicou um artigo provando um teorema que alguns dos maiores nomes da teori
números haviam tentado conquistar em vão.

Mas o fato de a conjectura ser *verdadeira* não era nenhuma surpresa. Matemático
reputação de se recusarem terminantemente a aceitar baboseiras e papo-furado; d
acreditar em nada enquanto não estiver provado e sacramentado. Isso não é bem ver
Todos nós acreditávamos na conjectura dos intervalos limitados antes da grande reve
de Zhang, e todos acreditamos na conjectura, parente próxima da conjectura dos p
gêmeos, mesmo que ela não fosse provada. Por quê?

Comecemos com aquilo que as duas conjecturas dizem. Os números primos são a
maiores que 1 e que não são múltiplos de nenhum número menor que eles próprios e
que 1; então, 7 é primo, mas 9 não é, porque é divisível por 3. Os primeiros primos d
são 2, 3, 5, 7, 11 e 13.

Todo número positivo pode ser expresso de uma única maneira como produ
números primos. Por exemplo, 60 é composto de dois 2, um 3 e um 5, porque 60 = 2
3 × 5. (É por isso que não consideramos 1 um número primo, embora alguns matem
o tenham feito no passado; ele quebra a exclusividade da composição, porque, se
contado como primo, 60 poderia ser escrito 2 × 2 × 3 × 5 e 1 × 2 × 2 × 3 × 5 e 1 × 1 ×
× 3 × 5 …) E os números primos em si? Tudo bem com eles. Um número primo, co
13, é o produto de um *único* número primo, o próprio 13. E o 1? Nós o excluímos da
lista de primos, então, como ele pode ser um produto de primos, cada qual maior q
Simples: 1 é o produto de *nenhum* primo.

Nesse ponto, às vezes me perguntam: "Por que o produto de nenhum primo é 1,
zero?" Aqui está uma explicação ligeiramente arrevesada: se você pegar o produto de a

conjunto de primos, como 2 e 3, mas dividi-lo pelos mesmos primos pelos quais multip
você deveria acabar com o produto de nada; e 6 dividido por 6 é 1, e não zero. (A *so*
nenhum número, por outro lado, é de fato zero.)

Os primos são os átomos da teoria dos números, as entidades básicas e indivisíve quais todos os números são feitos. Como tal, têm sido objeto de intenso estudo desd teve início a teoria dos números. Um dos primeiros teoremas provados em teori números é o de Euclides, que nos diz que os primos são infinitos em número, jam esgotarão, não importa a que distância na reta numérica permitimos nossa mente ava

Mas os matemáticos são tipos gananciosos, não inclinados a se satisfazer com uma afirmação da infinitude. Afinal, há infinitos e *infinitos*. Há infinitas potências de 2, ma são muito raras. Entre os primeiros mil números, há apenas dez:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 e 512.

Também há infinitos números pares, mas são muito mais comuns: exatamente quinh nos primeiros mil números. Na verdade, é bastante visível que nos primeiros N nún exatamente (½)N sejam pares.

Primos, por sua vez, são um meio-termo – mais comuns que as potências de 2, p mais raros que os números pares. Entre os primeiros N números, cerca de $N/\ln N$ são pr este é o teorema dos números primos, provado no fim do século XIX pelos teórico números Jacques Hadamard e Charles-Jean de la Vallée Poussin.

## Uma nota sobre o logaritmo e o flogaritmo

O fato de que dificilmente alguém saiba o que é o logaritmo tem me chamado a ate Gostaria de contribuir para corrigir isso. O logaritmo de um número positivo N, cha *ln N*, é o número de dígitos que ele tem.

Espere aí? Só isso?

Não. Não é realmente isso. Podemos chamar o número de dígitos de “falso logaritm *flogaritmo*. Ele é suficientemente próximo da coisa de verdade para dar a ideia geral d o logaritmo significa num contexto como este. O flogaritmo (portanto, também o logar é uma função que cresce muito devagar. O flogaritmo de 1.000 é 4, o flogaritmo de 1 m mil vezes maior, é 7, e o flogaritmo de 1 bilhão é somente 10.[e]

## Agora voltemos aos aglomerados de primos

O teorema dos números primos diz que, entre os primeiros N inteiros, uma proporç cerca de $1/\ln N$ deles é prima. Em particular, os números primos vão ficando cada vez n comuns à medida que os números crescem, embora a diminuição seja muito lenta número ao acaso com vinte dígitos tem a metade da probabilidade de ser primo qu

Naturalmente, imagina-se que quanto mais comum for um certo tipo de número, n os intervalos entre os casos desse tipo de número. Se você está olhando um númer nunca precisa viajar mais que dois números para diante a fim de encontrar o par seg Na verdade, os intervalos entre os números pares são sempre exatamente de taman Para as potências de 2, a história é diferente. Os intervalos entre duas potências suce de 2 crescem exponencialmente, ficando cada vez maiores, sem recuos, à medida que percorre a sequência. Uma vez tendo passado pelo 16, por exemplo, nunca mais voc duas potências de 2 separadas por um intervalo de 15 ou menos.

Esses dois casos são fáceis, mas a questão dos intervalos entre primos consecut mais difícil. É tão difícil que, mesmo depois da sacada de Zhang, ele continua um mi sob muitos aspectos.

Contudo, nós achamos que sabemos o que esperar, graças a um ponto de extraordinariamente fecundo: pensamos nos primos como *números aleatórios*. O moti essa fecundidade ser tão extraordinária é que o ponto de vista é muito, muito falso. P não são aleatórios! Nada em relação a eles é arbitrário ou sujeito ao acaso, exatame contrário. Nós os tomamos como características imutáveis do Universo e os entalhamo discos de ouro que enviamos para o espaço interestelar a fim de provar aos ETs qu somos bobos.

Os primos não são aleatórios, mas, sob muitos aspectos, *agem como se fossem* exemplo, quando você divide um número inteiro aleatório por 3, o resto é 0, 1 ou 2, e caso aparece com igual frequência. Quando você divide um número primo grande po quociente não pode ser exato, senão o chamado número primo seria divisível por 3, significaria que ele não era absolutamente primo. Mas um velho teorema de Dirichl que o resto 1 aparece com a mesma frequência, aproximadamente, que o resto 2, tal acontece no caso dos números aleatórios. No que se refere ao “resto quando se divid 3”, os números primos, à parte de não serem múltiplos de 3, parecem aleatórios.

E quanto aos intervalos entre primos consecutivos? Você poderia pensar que, pel de os números primos ficarem cada vez mais raros à medida que os números crescem também vão se afastando mais e mais. Em média, é isso que acontece. Mas Zhang p que há infinitos pares de primos que diferem no máximo em 70 milhões. Em outras pal o intervalo entre um primo e o seguinte está limitado a 70 milhões em infinitos casos a conjectura dos “intervalos limitados”.

Por que 70 milhões? Só porque foi isso que Zhang conseguiu provar. Na verda publicação de seu artigo deflagrou uma explosão de atividade, com matemáticos do m todo trabalhando juntos num “Polymath” – uma “Polimatemática” –, uma espéc comunidade matemática on-line, para reduzir ainda mais o intervalo usando variaçõ método de Zhang. Até julho de 2013, o coletivo havia demonstrado que há infinitos inte de tamanho máximo de 5.414. Em novembro, James Maynard, então recém-douto Montreal, fez o limite despencar para 600, e a Polymath agitou-se toda para combina conclusões com as demais. Quando você estiver lendo isso, o limite sem dúvida t reduzido ainda mais.

À primeira vista, os intervalos limitados poderiam parecer um fenômeno miraculo os primos tendem a se afastar cada vez mais, o que está fazendo com que haja tantos tão próximos? Será algum tipo de gravidade dos primos?

Não é nada desse tipo. Se você pega números aleatoriamente, é muito provável que a pares, por puro acaso, estejam muito próximos, assim como pontos gotejados de f aleatória num plano formam aglomerados visíveis.

Não é difícil calcular que, se os números primos se comportassem como núi aleatórios, você veria precisamente o comportamento que Zhang demonstrou. E ainda esperaria ver infinitos pares de primos separados por apenas 2, como 3-5 e 11-13. S chamados primos gêmeos, cuja infinitude permanece conjectural.

(Segue-se uma breve computação matemática. Se você não está a fim disso, des olhos e retome o texto onde ele diz "E uma porção de primos gêmeos…")

Lembre-se: entre os primeiros N números, o teorema dos números primos nos di cerca de $N/\ln N$ são primos. Se estes fossem distribuídos ao acaso, cada número *n* teria chance de $1/\ln N$ de ser primo. A chance de que *n* e $n + 2$ sejam ambos primos é poi cerca de $(1/\ln N) \times (1/\ln N) = (1/\ln N)^2$. Então, quantos pares de primos separados deveríamos esperar encontrar? Há aproximadamente N pares $(n, n + 2)$ na faixa de inte e cada um tem uma chance de $(1/\ln N)^2$ de ser um primo gêmeo, então, deve-se es encontrar cerca de $N/(\ln N)^2$ primos gêmeos no intervalo.

Há alguns desvios em relação à aleatoriedade pura cujos pequenos efeitos os teóricc números sabem como tratar. O ponto principal é que o fato de *n* ser primo e $n + 2$ ser p não são eventos independentes. O *n* primo, de algum modo, torna *mais provável* que seja primo, o que significa que nosso uso do produto $(1/\ln N) \times (1/\ln N)$ não está muito co (Uma coisa: se *n* é primo e maior que 2, então ele é ímpar, o que significa que $n + 2$ tar é ímpar, o que aumenta a probabilidade de $n + 2$ ser primo.) G.H. Hardy, o das "perplexi desnecessárias", com seu colaborador permanente, J.E. Littlewood, calcularam uma pre mais refinada levando em conta essas dependências, e prevendo que a quantidade de p gêmeos deveria ser aproximadamente 32% maior que $N/(\ln N)^2$. Essa melhor aproxin fornece uma previsão de que a quantidade de primos menores que 1 quatrilhão deve s cerca de 1,1 trilhão, valor bastante bom quando comparado com a cifra re 1.177.209.242.304. Isso é uma porção de primos gêmeos.

Uma porção de primos gêmeos é exatamente o que os teóricos dos números esp encontrar, não importa quanto os números cresçam – não porque pensamos que haja al estrutura profunda, milagrosa, oculta nos primos, mas *precisamente porque não pens assim*. Esperamos que os primos estejam distribuídos por aí ao acaso como poeira conjectura dos primos gêmeos fosse falsa, *isso* seria um milagre, exigindo que alguma até então desconhecida separasse os primos.

Não quero me alongar demais, mas um monte de conjecturas famosas na teori números funciona dessa maneira. A conjectura de Goldbach, de que todo número par r que 2 é a soma de dois primos, é outra que teria de ser verdadeira se os prim comportassem como números aleatórios. O mesmo ocorre com a conjectura de q primos contêm progressões aritméticas de qualquer extensão que se queira, cuja resol

A mais famosa de todas é a conjectura feita por Pierre de Fermat em 1637, que afir
que a equação

$$A^n + B^n = C^n$$

não tem soluções com A, B, C e *n* números inteiros positivos, com *n* maior que 2. (Qu
*n* é *igual* a 2, há uma porção de soluções, como $3^2 + 4^2 = 5^2$.)

Todo mundo acreditava firmemente que a conjectura de Fermat era verdadeira, como acreditamos agora na conjectura dos primos gêmeos, mas ninguém sabia como p la[f] até a descoberta de Andrew Wiles, matemático de Princeton nos anos 1990. Nós ac távamos nela porque enésimas potências perfeitas são muito raras, e a chance de enco dois números cuja soma resultasse num terceiro conjunto *aleatório* de tão extrema esc é quase nula. E ainda mais: a maioria das pessoas acreditava que não há soluções p *equação de Fermat generalizada*

$$A^p + B^q = C^r$$

quando os expoentes *p*, *q* e *r* são grandes o suficiente. Um banqueiro em Dallas cha Andrew Beal lhe dará US$ 1 milhão se você conseguir provar que essa equação não soluções para as quais *p*, *q* e *r* sejam maiores que 3, e A, B e C não tenham fator p comum.[g] Acredito plenamente que o enunciado seja verdadeiro, porque seria verdade potências perfeitas fossem aleatórias. Mas acho que teremos de compreender algo realn novo sobre os números antes de abrir caminho para uma prova. Passei alguns anos um punhado de colaboradores, provando que a equação generalizada de Fermat não solução com $p = 4$, $q = 2$ e *r* maior que 4. Só para este caso, tivemos de desenvolver alg técnicas novas, e é claro que elas não serão suficientes para cobrir totalmente o problen US$ 1 milhão.

Apesar da aparente simplicidade da conjectura dos intervalos limitados, a prova de Z exige alguns dos mais profundos teoremas da matemática moderna.[h] Elaborando a do trabalho de muitos predecessores, Zhang é capaz de provar que os números pr parecem aleatórios sob o primeiro aspecto que mencionamos, que diz respeito aos obtidos após divisão por muitos inteiros diferentes. A partir daí[i] ele consegue mostra os números primos parecem aleatórios num sentido totalmente diferente, que tem com os tamanhos dos intervalos entre eles. Aleatório é aleatório!

O sucesso de Zhang, e o trabalho correlato de outros medalhões contemporâneos, Ben Green e Terry Tao, aponta para uma perspectiva ainda mais empolgante que qua resultado individual relativo aos primos: de que poderíamos, enfim, estar a pon desenvolver uma teoria mais rica da aleatoriedade. Digamos, um meio de especificar p samente o que queremos dizer quando falamos que os números agem como se fo aleatoriamente distribuídos sem nenhuma estrutura governante, apesar de surgirem a de processos completamente deterministas. Que paradoxo maravilhoso: o que nos aj romper os mistérios finais sobre os números primos podem ser ideias matemáticas

[a] Algumas pessoas irão insistir na distinção de que o argumento só é uma *reductio* se a consequência da hipó
autocontraditória, ao passo que, se a consequência é meramente falsa, o argumento é um *modus tollens*.

[b] Como boa regra prática, você pode calcular que cada sujeito contribui com 1⁄20.000 de chance de encontrar um al
amostra, produzindo 50 × 1⁄20.000, ou 1⁄400. Esse cálculo não é exatamente correto, mas em geral é próximo o bast
casos como esse, em que o resultado é muito próximo de zero.

[c] De fato, é um princípio geral de retórica que, quando alguém diz "X é essencialmente Y", na maior parte das v
quer dizer "X não é Y, mas, para mim, seria mais simples se X fosse Y, então seria ótimo se você pudesse simplesm
em frente e fingir que X é Y, tudo bem?".

[d] Revelação: eu costumava ler os roteiros de *Numb3rs* antecipadamente para checar a correção matemática
comentários. Só uma linha que sugeri chegou a ir ao ar: "Tentar encontrar uma projeção de um triespaço afim
esfera sujeita a algumas restrições abertas."

[e] Aqui embaixo, no pé da página, posso revelar em segurança a definição real de 1n N; ele é o número *x* tal que
Aqui *e* é o número de Euler, cujo valor é aproximadamente 2,71828… Eu digo "*e*", e não "10", porque o logaritm
nos referimos é o *logaritmo natural*, não o logaritmo *comum decimal* ou de *base 10*. O logaritmo natural é aqu
sempre será usado se você for matemático ou se tiver *e* dedos.

[f] Fermat escreveu uma nota num livro alegando que tinha uma prova, mas que ela era longa demais para caber na m
Atualmente ninguém acredita nisso.

[g] Essa condição pode parecer meio que tirada do ar, mas acontece que existe um jeito fácil de gerar montes de s
"desinteressantes" se você permitir fatores comuns entre A, B e C.

[h] Sobretudo os resultados de Pierre Deligne, relacionando médias de funções da teoria dos números com geom
espaços de dimensões elevadas.

[i] Seguindo o caminho aberto por Goldston, Pintz e Yıldırım, os últimos a fazer algum progresso quanto aos interv
primos.

# 9. *A Revista Internacional de Haruspício*

EIS UMA PARÁBOLA que aprendi com o estatístico Cosma Shalizi.[1]

Imagine-se um harúspice, ou seja, sua profissão é fazer predições acerca de ev futuros sacrificando carneiros e examinando as características de suas entranhas, em es o fígado. Claro, você não considera suas predições confiáveis apenas porque segue as pr estabelecidas pelas divindades etruscas. Isso seria ridículo. Você requer evidências. A você e seus colegas submetem todo seu trabalho à revisão dos pares para publicaç *Revista Internacional de Haruspício*, que exige, sem exceção, que todos os resul publicados estejam de acordo com os parâmetros da significância estatística.

O haruspício, especialmente o haruspício rigoroso, com base na evidência, empreitada fácil, no mínimo porque você passa grande parte de seu tempo salpica sangue e bile. Outro motivo é que muitos dos seus experimentos não dão certo. Você usar tripas de carneiro para predizer o preço das ações da Apple e fracassa. Tenta esti suprimento global de petróleo e fracassa novamente. Os deuses são muito exigentes, é sempre que fica claro qual o arranjo preciso de órgãos internos e que encantações serão confiáveis para desvelar o futuro. Às vezes diferentes harúspices realizam o m experimento, e ele dá certo para uns mas não para outros – quem sabe por quê? É frust Em alguns dias você tem vontade de largar tudo e ir estudar advocacia.

Mas tudo vale a pena naqueles momentos de descoberta, quando as coisas dão c você percebe que a textura e as protuberâncias do fígado predizem a gravidade da es de gripe do próximo ano, e, com um silencioso agradecimento aos deuses, você pub resultado.

Você veria isso acontecer uma vez em vinte.

Em todo caso, esse fato é o esperável. Porque eu, ao contrário de você, não acredi haruspício. Acho que as tripas do carneiro não sabem nada sobre os dados da gripe, quando se encaixam, é pura sorte. Em outras palavras, em qualquer assunto refere predição do futuro por meio de entranhas, sou defensor da hipótese nula. Então, nc mundo, é bastante improvável que qualquer experimento de haruspício dê certo.

Mas quanto ele é improvável? O limiar-padrão para significância estatística, e po para publicação na *RevIntha*, é fixado por convenção para ter um valor-*p* de 0,05, ou u vinte. Lembre-se da definição de valor-*p*. Este diz precisamente que, *se* a hipótese verdadeira para algum experimento específico, então a chance de que esse experimer como retorno um resultado estatisticamente significativo é de apenas uma em vinte hipótese nula for sempre verdadeira – ou seja, se o haruspício for um abracadabr

Ainda assim, há centenas de haruspícios, milhares de carneiros com entr dilaceradas, e mesmo uma profecia em vinte oferece material de sobra para preenchei número da revista com novidades em termos de resultados, demonstrando a eficáci métodos e a sabedoria dos deuses. Um protocolo que funcionou em determinado ca publicado em geral falha quando outro harúspice tenta refazê-lo. Contudo, experim sem significância estatística não são publicados, então, ninguém jamais descobre nada o fracasso da repetição. Mesmo que a notícia começasse a se espalhar, há sempre peq diferenças que os especialistas indicam para explicar por que o estudo de acompanhar não deu certo. Afinal, nós *sabemos* que o protocolo funciona porque o testamos produziu um efeito estatisticamente significativo!

A medicina e a ciência social modernas não são haruspício. Contudo, um círculo vez mais ruidoso de cientistas dissidentes vem insistindo, nos últimos anos, numa mens desconfortável: provavelmente há muito mais leitura de entranhas nas ciências d gostaríamos de admitir.

O contestador mais sonoro é John Ioannidis,[2] um astro grego da matemática do e médio que se tornou pesquisador biomédico e cujo artigo de 2005, "Why most publ research findings are false", detonou um forte surto de autocrítica (e uma segunda on autodefesa) nas ciências clínicas. Alguns artigos chamam atenção com um título dramático que as alegações apresentadas no corpo do texto, mas não esse aí. Ioannidi a sério a ideia de que especialidades inteiras de pesquisa médica são "campos nulos", o haruspício, nos quais simplesmente não há efeitos reais a serem encontrados. "Po provar", escreve ele, "que a maioria dos supostos achados de pesquisas são falsos."

"Provar" é um pouco mais do que este matemático está disposto a engolir, mas Ioar certamente constrói um caso sólido em que sua alegação radical não se torna assii implausível. A história é mais ou menos assim. Em medicina, a maioria das interve que tentamos fazer não funciona, e a maioria das associações que testamos estará au Pense em testes de associação genética com doenças. Há montes de genes no genom maior parte deles não causa câncer nem depressão, não deixa você gordo, não tem qua efeito direto reconhecível.

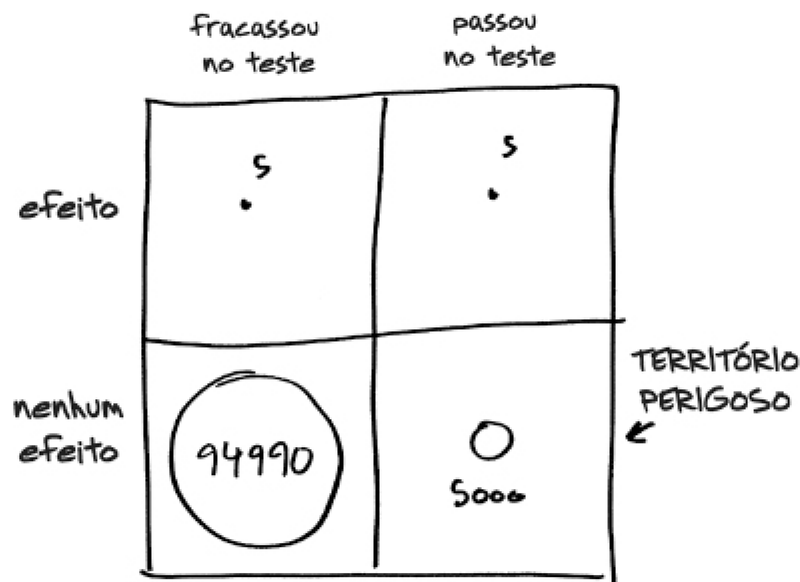
Ioannidis nos pede que consideremos o caso da influência genética sobre a esquizof Essa influência é quase certa, considerando o que sabemos sobre a hereditarieda distúrbio. Mas onde está ela no genoma? Pesquisadores podem lançar sua rede numa a área – afinal, é atrás dos Grandes Conjuntos de Dados que eles estão – em busca de 1( genes (mais precisamente, polimorfismos genéticos) para ver quais estão associa esquizofrenia. Ioannidis sugere que por volta de dez deles na realidade têm algum clinicamente relevante.

E os outros 99.990? Não têm nada a ver com esquizofrenia. Mas um em vinte del cerca de 5 mil, vai passar no teste de valor-*p* de significância estatística. Em outras pal entre os resultados tipo "Oh, céus, eu achei o gene da esquizofrenia" que poderia publicados, há *quinhentas vezes mais* falsos que verdadeiros.

E isso admitindo que todos os genes que realmente tenham algum efeito so esquizofrenia passem no teste! Como vimos com Shakespeare e com o basquete, é 1

não tiver potência suficiente para detectá-lo. Se as pesquisas tiverem potência baixa de os genes que realmente fazem diferença poderiam passar no teste apenas metade das No entanto, isso significa que, entre os genes certificados pelo valor-*p* como causado esquizofrenia, apenas *cinco* realmente o são, contra os 5 mil pretensos candidato passaram no teste por mera sorte.

Uma boa maneira de acompanhar as quantidades relevantes é desenhar círculos quadro:




O tamanho de cada círculo representa o número de genes em cada categoria. Na m esquerda do quadro temos os negativos, os genes que não passaram no teste de signific e na metade direita temos os positivos. Os dois quadrantes superiores represent minúscula população de genes que efetivamente afetam a esquizofrenia. Assim, os ger quadrante superior direito são os verdadeiros positivos (genes que importam, e que c diz que importam), enquanto o superior esquerdo representa os falsos negativos (gene importam, mas que o teste diz que não). Na fila de baixo, temos os genes que não impo os verdadeiros negativos são o círculo grande na parte inferior esquerda, os falsos posi o círculo no quadrante inferior direito.

Você pode ver pela figura que o teste de significância não é o problema. Ele fez exatar o que foi criado para fazer. Os genes que não afetam a esquizofrenia raramente passa teste, enquanto os genes nos quais estamos realmente interessados passam na metac vezes. Mas os genes não ativos são tão maciçamente preponderantes que o círculo de positivos, ainda que pequeno em relação aos verdadeiros negativos, é muito maior círculo dos verdadeiros positivos.

## Doutor, tenho dor no *p*

E a coisa fica ainda pior. Um estudo de baixa potência só vai ser capaz de ver um muito grande. Mas às vezes você sabe que o efeito, se existir, é pequeno. Em outras pal

como estatisticamente não significativo, enquanto qualquer resultado que passe no t < 0,05 é um falso positivo ou um verdadeiro positivo que superestima exageradame efeito do gene. A baixa potência é um perigo especial[3] em campos onde são comuns es pequenos e o tamanho dos efeitos é tipicamente modesto.

Um recente artigo na *Psychological Science*,[4] importantíssima publicação em psico descobriu que mulheres casadas eram significativamente mais propensas a apoiar Romney, o candidato presidencial republicano, quando estavam no período fértil d ciclo ovulatório: das mulheres pesquisadas durante o pico do período fértil, 40,4% ma taram apoio a Romney, enquanto apenas 23,4% das mulheres casadas pesquisada período não fértil levantavam a bandeira de Mitt.[a] A amostra é pequena, apena mulheres, mas a diferença é grande o suficiente para que o resultado passe no teste de *p* com uma pontuação de 0,03.

Esse é exatamente o problema, a diferença é grande *demais*. Será realmente plausíve entre mulheres casadas que preferem Mitt Romney, quase *a metade* passe grande pa cada mês apoiando Barack Obama? Será que ninguém notaria isso?

Se há mesmo uma virada política para a direita durante a ovulação, parece prováv ela seja muito menor. Mas o tamanho relativamente pequeno do estudo significa que avaliação mais realista da intensidade do efeito teria sido rejeitada, de modo paradoxal filtro do valor-*p*. Em outras palavras, podemos ter razoável confiança de que o grande relatado no estudo é principalmente, ou inteiramente, apenas ruído de sinal.

Mas o ruído tem a mesma probabilidade de empurrar você tanto na direção *oposi* efeito real quanto na direção da verdade. Então acabamos no escuro, por causa d resultado que fornece muita significância estatística, mas muito pouca confiança.

Os cientistas chamam esse problema de "maldição do vencedor", e ele é um dos m pelos quais resultados impressionantes e ruidosamente alardeados muitas vezes se des em decepcionante lodo quando os experimentos são repetidos. Num caso represent uma equipe de cientistas liderada pelo psicólogo Christopher Chabris[b] estudou treze morfismos de nucleotídeo único (SNP, de Single-Nucleotide Polymorphism) no ge que haviam sido observados em estudos anteriores como se tivessem correlações est camente significativas com a pontuação nos testes de QI. Sabemos que a habilidade sair bem nesses testes é um tanto hereditária, então, não deixa de ser razoável pro marcadores genéticos. Mas quando a equipe de Chabris testou esses SNPs[6] com medic QI em grandes conjuntos de dados, como o Estudo Longitudinal de Wisconsin, real com 10 mil pessoas, cada uma dessas associações esvaneceu-se em insignificância. Se f de fato reais, as associações são pequenas demais para se detectar até por um experir de grande porte.

Hoje os geneticistas acreditam que a hereditariedade dos pontos do teste c provavelmente não está concentrada em alguns poucos genes metidos a sabidos, e si acúmulos provenientes de numerosos traços genéticos, cada um com efeito minúsculo dizer que se você sair à caça de efeitos grandes de polimorfismos individuais terá êx mesma proporção de uma em vinte que os leitores de entranhas.

Nem Ioannidis acha realmente que apenas um artigo em mil publicados esteja co

testam hipóteses em que os pesquisadores têm alguma razão preexistente para acredit modo que a metade inferior do quadro não predomina tanto assim sobre o topo. Mas a de replicabilidade é real. Num estudo de 2012, cientistas da empresa de biotecno Amgen, sediada na Califórnia, propuseram-se a replicar alguns dos resultados experime mais famosos na biologia do câncer, 53 estudos ao todo.[7] Nas suas tentativas independ conseguiram reproduzir apenas seis.

Como isso pode ter acontecido? Não porque os geneticistas e pesquisadores de c sejam bobões. Em parte, a crise de replicabilidade é simplesmente reflexo do fato de ciência é difícil e de que a maioria das ideias que temos está errada – mesmo a maior ideias que sobrevive ao primeiro round de cutucadas.

Mas há práticas no mundo da ciência que tornam a crise pior, e estas podem ser muc Por algum motivo estamos publicando erros. Considere a profunda tirinha xkcd,[c] na p seguinte. Suponha que você tenha testado vinte marcadores genéticos para ver se associados a alguma desordem de interesse, e descobriu apenas um resultado que at significância $p < 0{,}05$. Sendo sofisticado em matemática, você reconheceria que um su em vinte é exatamente o que seria de esperar se nenhum dos marcadores tivesse qua efeito, e zombaria da manchete mal-orientada, exatamente como o cartunista pretende




E mais ainda se você testasse o mesmo gene ou a mesma bala de goma vinte ve obtivesse um efeito estatisticamente significativo apenas uma vez.

Mas e se as balas de goma verdes fossem testadas vinte vezes por vinte diferentes g de pesquisa em vinte laboratórios diferentes? Dezenove dos laboratórios não encoı nenhum efeito estatisticamente significativo. Eles não reportam seus resultados – que publicar o artigo bomba dizendo que “balas de goma verdes são irrelevantes par aparência”? Os cientistas no vigésimo laboratório, os sortudos, encontram um efeito tisticamente significativo porque têm sorte – mas *não sabem* que tiveram sorte. Tud podem saber é que sua teoria de que “balas de goma verdes causam acne” foi testada a uma vez e passou.

Se você resolve a cor das balas de goma que vai comer com base apenas nos artigc são publicados, está cometendo o mesmo erro que o Exército quando contava os bu de bala nos aviões que voltavam da Alemanha. Como demonstrou Abraham Wald, se quer uma opinião honesta do que está se passando, também precisa considerar os a que *não* voltaram.

Esse é o chamado problema da gaveta de arquivo – um campo científico tem uma drasticamente distorcida da evidência para uma hipótese quando a divulgação púb cortada por um limiar de significância estatística. Mas nós já demos outro nome a problema. É o corretor de ações de Baltimore. O cientista de sorte que prepara empo um press release sobre as correlações dermatológicas do corante verde nº 16 é igualzin investidor ingênuo despachando suas economias para um corretor picareta. O inves como o cientista, consegue ver o único resultado do experimento que deu certo por a mas é cego para o grupo maior de experimentos que falharam.

No entanto, há uma grande diferença. Em ciência, não há um vigarista escuso nem vítima inocente. Quando a comunidade científica arquiva na gaveta os experimento falharam, ela desempenha ambos os papéis ao mesmo tempo. *Eles próprios estão ban os vigaristas consigo mesmos.*

E tudo isso presumindo que os cientistas em questão estejam jogando honestan Mas nem sempre isso acontece. Lembra-se do problema do espaço de manobra que enr os interessados nos códigos da Bíblia? Os cientistas, sujeitos à mesma pressão inter publicar para não perecer, não são imunes às mesmas tentações de manobra. Se você fa análise e obtém um valor-*p* de 0,06, teoricamente deve concluir que seus resultado estatisticamente insignificantes. Mas é preciso muita força mental para jogar anos de tra na gaveta do arquivo. Afinal, será que os números para aquele sujeito experimental espe não parecem um pouco distorcidos? Provavelmente, num caso extremo, quem sabe melhor tentar deletar essa linha da planilha? Fizemos o controle por idade? Control levando em consideração o tempo lá fora? Controlamos por idade *e* considerando o t lá fora? Dê a si mesmo licença para torcer e ocultar um pouco os resultados dos estatísticos realizados, e com frequência você consegue reduzir 0,06 para 0,04.

Uri Simonsohn, professor na Universidade da Pensilvânia, líder no estud replicabilidade, chama essas práticas de “hackear *p*”.[8] Hackear o *p* geralmente não é alg grosseiro como fiz parecer, e poucas vezes é algo mal-intencionado. Os *p*-hackers acre sinceramente em suas hipóteses, da mesma forma que os adeptos dos códigos da Bíb quando se é um crédulo, é fácil inventar motivos para que a análise que produz um

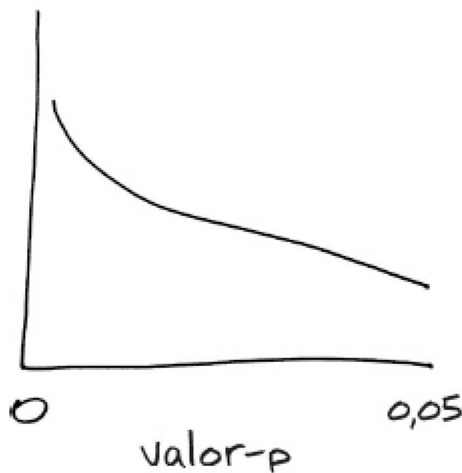
Mas todo mundo sabe que realmente não está certo. Quando pensam que não há nin escutando, os cientistas chamam a prática de “torturar os dados até que confessem confiabilidade dos resultados é aquela que você esperaria de confissões extraídas à for

Avaliar a escala do problema de hackear *p* não é fácil – não se podem examinar os a escondidos na gaveta ou que simplesmente nunca foram escritos, da mesma forma qu se podem examinar os aviões abatidos na Alemanha para ver onde foram atingidos. possível, como no caso de Abraham Wald, fazer algumas inferências sobre dados qu se podem medir diretamente.

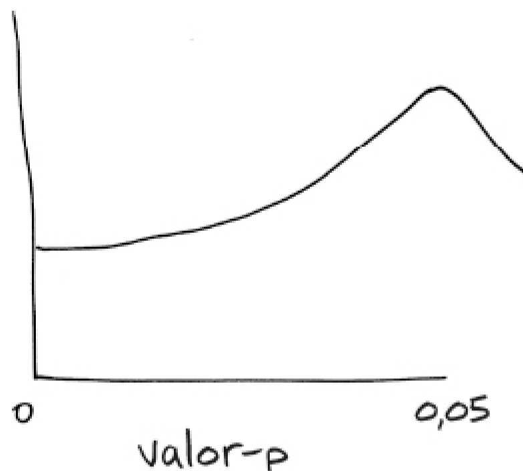
Pense novamente na *Revista Internacional de Haruspício*. O que você veria se ol cada artigo já publicado ali e registrasse os valores-*p* que descobriu? Lembre-se, ness a hipótese nula é sempre verdadeira, porque haruspício não funciona; assim, 5 experimentos registrarão um valor-*p* de 0,05 ou inferior; 4% registrarão 0,04 ou menc registrarão 0,03 ou menos; e assim por diante. Outra maneira de dizer isso é que o nú de experimentos que produzem valor-*p* entre 0,04 e 0,05 deveria ser mais ou menos *o n* que o número de experimentos produzindo entre 0,03 e 0,04, entre 0,02 e 0,03 etc. S pusesse num gráfico os valores-*p* registrados em todos os artigos veria uma linha reta essa:




Agora, e se você olhasse uma revista de verdade? Espera-se que uma porção de fenôn que você esteja caçando seja efetivamente real, o que torna mais provável que o experimentos obtenham uma boa (significando baixa) contagem de valor-*p*. Então, o g dos valores-*p* deveria ter uma inclinação descendente.




Só que não é exatamente isso que acontece na vida real. Em campos que variam ciência política e economia até psicologia e sociologia,[9] os detetives estatísticos descob uma perceptível inclinação *ascendente* à medida que o valor-*p* se aproxima do limi 0,05:




Essa inclinação é o formato do hackeamento de *p*. Ela nos conta que muitos resul de experimentos que pertencem ao lado não publicado da fronteira de *p* = 0,05 alterados, remexidos, torcidos ou simplesmente torturados até que, por fim, acab ficando do lado feliz da fronteira. Isso é bom para cientistas que necessitam de public mas é ruim para a ciência.

E se um autor se recusa a torturar os dados, ou a tortura falha em apresentar o resu desejado, e o valor-*p* se mantém grudado um pouco acima do importantíssimo 0,0 soluções alternativas. Os cientistas se contorcem para elaborar piruetas verbais a fi justificar a divulgação de um resultado que não atinge a significância estatística: dizer o resultado é "quase estatisticamente significativo", ou "tende para a significância", praticamente significativo", ou "está no limite da significância".[d] É fácil zombar dos a tiados pesquisadores que recorrem a essas frases, mas deveríamos odiar o jogo, n jogadores – não é culpa *deles* que a publicação esteja condicionada a um limiar de tu nada. Viver ou morrer por 0,05 é cometer um erro básico de categoria, tratando uma va contínua (quanta evidência temos de que a droga funciona, o gene prediz o QI, mul

férteis gostam de republicanos?) como se fosse uma variável binária. (Verdadeiro ou Sim ou não?) Os cientistas *deveriam* ter permissão para informar dados estatisticar não significativos.

Em alguns contextos, eles podem ser obrigados a isso. Num parecer de 2010, a Sup Corte dos Estados Unidos determinou por unanimidade[10] que a Matrixx, fabrican remédio para resfriados Zicam, devia revelar que alguns dos usuários de seu produto ha sofrido de anosmia, a perda do sentido do olfato. A opinião da corte, redigida por Sotomayor, sustentava que embora os casos reportados de anosmia não passassem nc de significância, ainda assim eles contribuíam para a "mescla total" de informações a c investidores de uma empresa esperam ter acesso. Um resultado com valor-*p* fraco fornecer apenas um pouco de evidência, mas pouco é melhor que nada; um resultadc valor-*p* forte pode fornecer mais evidência, porém, como vimos, está longe de certifica o efeito alegado é real.

Não há nada de especial, enfim, em relação ao valor 0,05. Ele é puramente arbit uma convenção escolhida por Fisher. Existe um certo valor na convenção. Um limiar u que todos aceitam, garante que sabemos do que estamos falando quando usamos a pa "significativo". Certa vez li um artigo de Robert Rector e Kirk Johnson,[11] da conserv Heritage Foundation, reclamando que uma equipe rival de cientistas havia alegado mente que declarações de abstinência não faziam diferença, entre adolescentes, nas ta doenças sexualmente transmissíveis. Na verdade, os adolescentes do estudo que ha jurado esperar a noite de núpcias *de fato* tinham uma taxa ligeiramente mais baixa de que o restante da amostra, mas a diferença não era estatisticamente significativa. O p da Heritage tinha razão. A evidência de que as declarações eram verdadeiras mostra fraca, mas não estava inteiramente ausente.

Por outro lado, Rector e Johnson escreveram em outro artigo, referente à re estatisticamente não significativa entre raça e pobreza que eles desejam desconsidera uma variável não é estatisticamente significativa, isso quer dizer que a variável nã diferença estatisticamente discernível entre o valor do coeficiente e zero, e então n efeito."[12] O que é bom para o pateta abstinente também é bom para o gênero racialr agredido! O valor da convenção é que ela impõe alguma disciplina aos pesquisa livrando-os da tentação de deixar que suas próprias preferências determinem quais re dos contam e quais não.

No entanto, uma fronteira convencional, obedecida por bastante tempo, pode facilr ser tomada por uma coisa do mundo real. Imagine se falássemos sobre o estado da econ dessa maneira! Os economistas têm uma definição formal de "recessão" que depende c limiar arbitrário exatamente como a "significância estatística". Ninguém diz: "Não m porto com a taxa de desemprego, com problemas de habitação, com a carga agregad empréstimos estudantis ou com o déficit federal. Isso não é recessão, não vamos fal

assunto.” A pessoa seria maluca de dizer isso. Os críticos – e há cada vez maior nú deles, cada vez mais estridentes, ano após ano – dizem que uma grande dose de p científica abriga esse tipo de maluquice.

## O detetive, não o juiz

Claro que está errado usar “$p < 0,05$” como sinônimo de “verdadeiro” e “$p > 0,05$” sinônimo de “falso”. *Reductio ad* improvável, por mais atraente que seja intuitivament funciona para inferir a verdade científica sob os dados.

Mas qual a alternativa? Se você já realizou algum experimento, sabe que a ve científica não surge sem mais nem menos, das nuvens, tocando uma trombeta flam para você. Dados são confusos e inferência é difícil.

Uma estratégia simples e popular é reportar *intervalos de confiança* em adição aos va *p*. Isso envolve uma ligeira ampliação do escopo conceitual, pedindo-nos para consi não só a hipótese nula, porém toda uma gama de alternativas. Talvez você opere um on-line que vende tesouras artesanais para ornamentar jardins. Sendo uma pessoa mo (exceto pelo fato de fazer tesouras artesanais para decorar jardins), você monta um te onde metade dos usuários vê a versão corrente do seu site (A) e outra metade vê uma v remodelada (B), com uma tesoura animada que canta e faz uma dancinha sobre o “Compre agora”. E você descobre que as vendas sobem 10% com a opção B. Ótimo! A se você é do tipo sofisticado, poderia se preocupar se esse aumento é só uma quest flutuação aleatória – então você calcula um valor-*p*, descobrindo que a chance de obt resultado tão bom, se não fosse realmente por causa do novo desenho do site (isto é hipótese nula estivesse correta), é de apenas 0,03.[e]

Mas por que parar aqui? Se vou pagar a um garoto de faculdade para sobrepor tesourinha dançante em todas as minhas páginas, quero saber não só se funciona, mas bem funciona. Será que o efeito que vi é consistente com a hipótese de que a remodel do site, a longo prazo, está realmente melhorando as minhas vendas em 5%? Po hipótese, você poderia descobrir que a probabilidade de observar um crescimento de muito mais provável – digamos, 0,2. Em outras palavras, a hipótese de que a remodel do site é 5% melhor *não* é excluída pela *reductio ad* improvável. Por outro lado, você se perguntar de forma otimista se teve algum *azar*, e a remodelagem estava real tornando suas tesouras 25% mais atraentes. Você calcula outro valor-*p* e obtém suficientemente improvável para induzir você a jogar fora a hipótese.

O intervalo de confiança é a faixa de hipóteses que a *reductio ad* improvável não que se jogue no lixo, aquelas razoavelmente consistentes com o resultado que você obse Nesse caso, o intervalo de confiança poderia variar de +3% a +17%. O fato de zero, a hip nula, *não* estar incluído no intervalo de confiança equivale a dizer que os resultad estatisticamente significativos no sentido antes descrito neste capítulo.

Mas o intervalo de confiança lhe diz muito mais. Um intervalo de [+3%, +17%] per lhe ter confiança de que o efeito é positivo, mas não particularmente grande. Um inte de [+9%, +11%], por outro lado, sugere muito mais intensamente que o efeito nãc positivo, como também que ele é bem grande.

O intervalo de confiança é igualmente informativo em casos nos quais você não c um resultado estatisticamente significativo – ou seja, onde o intervalo de confiança in zero. Se o intervalo de confiança é [−0,5%, 0,5%], então a razão de você não ter c significância estatística é uma boa evidência de que a intervenção não tem efeito algu o intervalo de confiança é [−20%, 20%], você não obtém significância estatística porqu se sabe se a intervenção tem algum efeito, ou em que direção esse efeito se dá. Esse: resultados parecem iguais do ponto de vista da significância estatística, mas têm implic bem diferentes para o que você deve fazer em seguida.

O desenvolvimento do intervalo de confiança geralmente é atribuído a Jerzy Ney outro gigante dos primórdios da estatística. O polonês Neyman, como Abraham começou exercendo a matemática pura na Europa Oriental antes de assumir a nova p então recém-criada da estatística matemática e mudar-se para o Ocidente. No fim da d de 1920, ele começou a colaborar com Egon Pearson, que havia herdado de seu pai, tanto o posto de professor quanto uma amarga contenda acadêmica com R.A. Fisher era um tipo difícil, sempre pronto para brigar. Uma vez sua filha disse a seu respeito cresceu sem desenvolver uma sensibilidade à humanidade comum de seus semelhan Em Neyman e Pearson ele encontrou oponentes afiados o bastante para combatê-lo du décadas.

As divergências científicas entre eles talvez sejam mais cruamente exibidas na abord que Neyman e Pearson desenvolveram acerca do problema da inferência.[f] Como deter a verdade a partir da evidência? A espantosa resposta é: desfazer as perguntas. Para Ne e Pearson, o propósito da estatística não é nos dizer em que acreditar, mas nos dizer *fazer*. A estatística trata de tomada de decisões, não de responder a perguntas. Um te significância não passa de uma regra que diz às pessoas encarregadas se devem aprovar droga, realizar uma reforma econômica proposta ou incrementar um website.

À primeira vista parece loucura negar que a meta da ciência é descobrir o que é verda mas a filosofia de Neyman-Pearson não está longe do raciocínio que usamos em c esferas. Qual o propósito de um julgamento criminal? Ingenuamente, poderíamos dize é descobrir se o réu cometeu o crime pelo qual está sendo julgado. Mas isso está errad regras para a evidência que proíbem o júri de ouvir testemunhos obtidos de forma i quada, mesmo que isso pudesse ajudá-lo a determinar com exatidão a inocência ou a do réu. O propósito de um tribunal não é a verdade, mas a justiça. Temos regras, e as r precisam ser obedecidas. Quando declaramos que o réu é "culpado", se tivermos cu com as nossas palavras, não estamos dizendo que ele cometeu o crime pelo qual é acu mas que foi condenado justa e corretamente de acordo com essas regras. Quaisque sejam as regras escolhidas, deixaremos alguns criminosos livres e mandaremos para a p alguns dos inocentes. Quando menos se fizer o primeiro, mais provavelmente se f segundo. Assim, procuramos determinar as regras da maneira que a sociedade julga

Para Neyman e Pearson, a ciência é como o tribunal. Quando uma droga fracassa teste de significância, não dizemos "Estamos bastante certos de que a droga não funcic mas "A droga não demonstrou eficácia", e a desconsideramos, como faríamos com u cuja presença na cena do crime não pôde ser estabelecida dentro de uma dúvida raz mesmo que cada homem e mulher na corte ache que ele é culpado.

Fisher não queria nada disso. Para ele, Neyman e Pearson cheiravam a matemática insistindo num racionalismo austero à custa de qualquer coisa que se assemelhasse a prática científica. A maioria dos juízes não teria estômago para deixar um réu obviar inocente rumar em direção ao carrasco, mesmo que o livro de regras o exija. A maior cientistas praticantes não tem interesse em cumprir uma sequência rígida de instru negando a si mesmo a satisfação autopoluente de formar uma opinião a respeito d hipóteses são realmente verdadeiras. Numa carta de 1951 para W.E. Hick, Fisher escr

> Lamento um pouco que esteja chegando a se preocupar com essa abordagem portentosamente desnecessária do de significância representada pelas regiões críticas de Neyman e Pearson etc. Na verdade, eu e meus discípul mundo jamais pensaríamos em usá-las. Se me pedem para dar uma razão explícita para isso eu diria que eles al o problema a partir da perspectiva inteiramente errada, isto é, não do ponto de vista de um trabalhador em p com uma base de conhecimento bem-fundamentado sobre a qual uma população bastante flutuante de conje observações incoerentes está continuamente sob exame. O que ele precisa é de uma resposta confiável para a pe "Devo prestar atenção a isso?" Esta pergunta pode, claro – e, em nome do requinte de pensamento, deve –, ser for como "Essa hipótese particular é derrubada; se for, com que nível de significância, por este particular cc observações?" Ela pode ser formulada dessa maneira, inequivocamente, apenas porque o experimentador ger tem as respostas para todas as perguntas que os seguidores de Neyman e Pearson tentam – acho que em vão – res com considerações puramente matemáticas.[14]

Mas Fisher decerto entendia que ultrapassar a altura da significância não era a m coisa que descobrir a verdade. Ele divisa uma abordagem mais rica, mais iterada, escrev em 1926: "Um fato científico deve ser encarado como estabelecido experimental apenas se um experimento projetado da forma adequada poucas vezes falha em pro esse nível de significância."[15]

Não "tem êxito uma vez em produzir", mas "poucas vezes falha em produzir". Um a estatisticamente significativo fornece uma pista, sugerindo um lugar promissor pa concentrar a energia da pesquisa. *O teste de significância é o detetive, não o juiz*. Sabe qu você lê um artigo sobre um achado importante, mostrando como essa coisa causa a outra coisa, ou aquela coisa impede a outra coisa, e no final sempre há uma citação ba algum cientista mais velho, não envolvido no estudo, entoando alguma variante men "O achado é bastante interessante e sugere que se faz necessária outras pesquisas na m direção"? E como você nem lê realmente essa parte porque acha que não passa de advertência obrigatória, sem conteúdo?

Aí está: o motivo de os cientistas sempre dizerem isso é porque é importante e é ver O achado provocativo e "oh, tão estatisticamente significativo" não são a conclus processo científico, mas o início. Se o resultado é novo e importante, outros cientist outros laboratórios devem testar e retestar o fenômeno e suas variantes, tentando desc se o resultado foi uma casualidade de uma só vez ou se verdadeiramente atende ao p de Fisher de "poucas vezes falha". É isso que os cientistas chamam de *replicação*. Se um não pode ser replicado, apesar das repetidas tentativas, a ciência se desculpa e retroce

processo de replicação é como o sistema imune da ciência, atacando maciçamente os ol recém-introduzidos e matando aqueles que não deviam estar ali.

De qualquer modo, esse é o ideal. Na prática, a ciência sofre um pouquinh imunossupressão. Alguns experimentos, claro, são difíceis de repetir. Se o seu estudo a capacidade de uma criança de quatro anos de protelar a gratificação e relaciona medições a resultados da vida daí a trinta anos, não é possível simplesmente tirar do ar replicação.

No entanto, mesmo estudos que *poderiam* ser replicados muitas vezes não o são. revista científica quer publicar um achado sensacional, mas quem quer publicar o a que faz o mesmo experimento um ano depois e obtém o mesmo resultado? Pior air que acontece com os artigos que relatam o mesmo experimento e *não* acham um resu significativo? Para que o sistema funcione, esses experimentos devem ser tornados púb Contudo, com muita frequência, eles acabam engavetados.

Mas a cultura está mudando. Reformadores com vozes sonoras, como Ioann Simonsohn, que falam tanto para a comunidade científica quanto para o público mais a têm gerado um novo sentido de urgência acerca do perigo de cair em haruspício em escala. Em 2013, a Associação para a Ciência Psicológica anunciou que começaria a pu um novo gênero de artigo, classificado como "Relatórios de replicações registradas". Vis a reproduzir os efeitos reportados em estudos largamente citados, eles são tratados de r diferente dos artigos usuais num aspecto crucial: o experimento proposto é aceito publicação *antes* de o estudo ser realizado. Se os resultados respaldam o achado ir ótima notícia. Senão, eles são publicados mesmo assim, para que toda a comunidade a plena situação da evidência.

Outro consórcio, o projeto Many Labs, revisita achados importantes em psicolc tenta replicá-los em grandes amostras multinacionais. Em novembro de 2013, psicó foram ovacionados quando o primeiro grupo de resultados do Many Labs retornou, d brindo que dez entre treze estudos abordados foram replicados com sucesso.

No final, claro, é preciso fazer julgamentos, e linhas devem ser traçadas. O que, a Fisher realmente quer dizer quando usa o termo "poucas vezes" em "poucas vezes falh atribuímos um limiar numérico arbitrário ("um efeito é real se atinge significância estat em mais de 90% dos experimentos"), podemos nos ver novamente em apuros.

Fisher, de todo modo, não acreditava numa regra rápida e rígida que nos diga o que Ele era um desconfiado em relação ao formalismo da matemática pura. Em 1956, per fim da vida, escreveu que "na verdade nenhum pesquisador científico tem um nív significância fixo a partir do qual, de ano a ano, e em todas as circunstâncias, rejeite hipó ele prefere considerar cada caso particular à luz de sua evidência e de suas ideias".[16]

No próximo capítulo, veremos um modo pelo qual "a luz da evidência" pode se t mais específica.

---

[a] Fiquei decepcionado ao descobrir que esse estudo ainda não gerou nenhum vídeo de conspiração alegando que de Obama ao controle da natalidade destinava-se a suprimir o instinto biológico feminino de votar no republicano

[b] Chabris talvez seja mais famoso por seu vídeo imensamente popular no YouTube demonstrando o princípio co da atenção seletiva: os espectadores são solicitados a observar um grupo de estudantes passando uma bola de basq um lado a outro, e geralmente deixam de notar um ator fantasiado de gorila entrando e saindo de cena.

[c] xkcd é uma tirinha publicada on-line, criada por Randall Munroe. (N.T.)

[d] Todos esses exemplos são tirados da imensa coleção do blog do psicólogo de saúde Matthew Hankins, conhec resultados não significativos.

[e] Todos os números desse exemplo são inventados, em parte porque o cálculo real de intervalos de confiança complicado do que estou revelando neste pequeno espaço.

[f] Alerta de supersimplificação: Fisher, Neyman e Pearson viveram e escreveram por um longo período, e suas i modificaram no decorrer das décadas; o esboço grosseiro que tracei da diferença filosófica entre eles ignora muita importantes no pensamento de cada um. Em particular, a perspectiva de que a preocupação básica da estatística decisões está mais associada a Neyman que a Pearson.

# 10. Ei, Deus, você está aí? Sou eu, a inferência bayesiana

A ERA DOS GRANDES CONJUNTOS de dados é assustadora para muita gente, em parte promessa implícita de que os algoritmos, suficientemente supridos de dados, são mel em inferência do que nós. Poderes sobre-humanos são assustadores, seres que podem n de forma são assustadores, seres que se erguem dos mortos são assustadores, seres ca de fazer inferências que não podemos fazer são assustadores. Foi assustador quand modelo estatístico implantado pela equipe da Guest Marketing Analytics,[1] na rede de Target, inferiu corretamente, com base nos dados de compra que uma de suas clien desculpe, *hóspedes* –, uma adolescente de Minnesota, estava grávida, com base numa fór misteriosa envolvendo altos índices de compras de loção sem cheiro, suplementos mi e algodão em flocos. A Target começou a lhe enviar cupons de artigos de bebê, consternação do pai da menina, que, com seu insignificante poder de inferência hu ainda estava no escuro. Assustador é contemplar e viver num mundo onde Google, Face seu telefone e, iiiih, até a Target sabem mais sobre você que seus pais.

Talvez devêssemos passar menos tempo nos preocupando com algor assustadoramente superpoderosos e mais nos preocupando com algoritmos que sãc porcaria.

Isso por uma razão: as porcarias não podem ficar melhores. Sim, os algoritmo dirigem os negócios no Vale do Silício ficam cada vez mais sofisticados todo ano e os que os alimentam, mais e mais volumosos e nutritivos. Há uma visão do futuro na Google *conhece* você, na qual, agregando milhões de micro-observações ("Quanto t ele hesitou antes de clicar *nisso*…""Quanto tempo seu Google Glass se deteve *naquilo*. armazém central pode predizer suas preferências, seus desejos, suas ações, em espec que se refere a que produtos você deseja ou seria persuadido a desejar.

Poderia ser assim! Mas também poderia não ser. Há montes de problemas matem em que fornecer mais dados melhora a acurácia dos resultados de forma bastante prev Se você quer predizer o curso de um asteroide, precisa medir sua velocidade e sua po bem como os efeitos gravitacionais dos objetos em sua vizinhança astronômica. Q mais medições você fizer do asteroide e quanto mais precisas forem essas medições, m você se sairá na determinação da rota.

No entanto, alguns problemas se parecem mais com a previsão do tempo. Essa é situação na qual ter uma profusão de dados extremamente refinados e o poder computa de processá-los depressa de fato ajuda. Em 1950, um dos primeiros computadores, o I levou 24 horas para simular 24 horas do tempo, e essa foi uma façanha espanto computação na era espacial. Em 2008, essa computação foi reproduzida num telefone c

elas têm uma abrangência mais longa e são mais exatas também. Em 2010, uma previsão de cinco dias era tão acurada quanto uma previsão de três dias em 1986.[3]

É tentador imaginar que as predições simplesmente ficarão cada vez melhores à m que aumentar nossa capacidade de reunir dados. Será que teremos toda a atmosfera sim com alta precisão num servidor, em algum lugar, na sede do *The Weather Channel*? E se você quisesse saber o tempo nos próximos meses, bastaria deixar a simulação pro um pouco mais para diante.

Não vai ser assim. A energia na atmosfera borbulha muito depressa, desde as e mais minúsculas até a mais global, e o efeito disso é que mesmo uma alteração mínin determinado local e instante pode levar a um resultado imensamente diferente daí a a dias. O clima, no sentido técnico da palavra, é *caótico*. Na verdade, foi no estudo num do clima que Edward Lorenz descobriu inicialmente a noção matemática de cao escreveu: "Um meteorologista comentou que, se a teoria estivesse correta, o bater de a uma borboleta seria suficiente para alterar para sempre o curso do clima. A contro ainda não foi resolvida, porém, a evidência mais recente parece ser a favor das borbol

Há um limite rígido para a antecedência com que conseguimos prever o tempo importar a quantidade de dados coletados. Lorenz achava que eram cerca de duas sem [5] e até agora os esforços concentrados dos meteorologistas do mundo não deram m para duvidar desse limite.

O comportamento humano parece mais o asteroide ou o tempo? Sem dúvida isso de de que lado do comportamento humano estamos falando. Pelo menos sob um aspe comportamento humano deve ser ainda mais difícil de prever que o tempo. Temo modelo matemático muito bom para o tempo, que nos permite ao menos melhor previsões de curto prazo quando temos acesso a novos dados, mesmo que o inerente do sistema acabe ganhando no final. Para a ação humana, não temos esse modelo, e nunca tenhamos. Isso torna o problema da predição extremamente mais difícil.

Em 2006, a companhia de entretenimento on-line Netflix lançou uma competição $ 1 milhão[6] para ver se alguém no mundo era capaz de escrever um algoritmo que f um serviço melhor que o da própria Netflix na recomendação de filmes para os clien linha de chegada não parecia muito longe da linha de partida. O vencedor seria o pri programa que fosse 10% melhor que a Netflix em recomendar os filmes.

Os competidores receberam um gigantesco arquivo de avaliações anônimas – cerc milhão de avaliações ao todo, cobrindo 17.700 filmes e quase meio milhão de usuári Netflix. O desafio era predizer como os usuários avaliariam os filmes que *não tinham* Existiam dados, montes de dados, todos diretamente relevantes para o comportament se tentava predizer. No entanto, esse problema é muito, muito difícil. Acabou levand anos antes que alguém cruzasse a barreira da melhora de 10%, e isso só foi conse quando diversas equipes se juntaram e hibridizaram seus algoritmos "quase bons o suf te" em algo forte o bastante para desabar por cima da linha de chegada. A Netflix j chegou a usar o algoritmo vencedor em seus negócios. Quando a competição termin empresa já estava negociando para enviar DVDs por correio e transmitir filmes on-l que tornava as recomendações furadas menos graves.[7] Se você já usou a Netflix

dados reunidos a seu respeito) sabe que as recomendações continuam comicamente
A empresa deveria melhorar muito à medida que novos fluxos de dados fossem integ
ao perfil dos usuários. Mas decerto não vai melhorar.

Do ponto de vista das empresas que fazem a junção dos dados, isso não é ruim.
ótimo para a Target se eles soubessem com absoluta certeza se você está ou não gr
somente seguindo a pista de seu cartão de fidelidade. Mas não sabem. Também seria
se pudessem ser 10% mais exatos em seus palpites sobre a gravidez que agora. O m
vale para o Google. Eles não precisam saber exatamente que produto você quer, basta
uma ideia melhor que os canais de publicidade concorrentes. Os negócios em geral op
com margens estreitas. Predizer o seu comportamento com 10% a mais de acurác
realidade não é tão assustador para você, mas pode significar um bocado de dinheiro
eles.

Perguntei a Jim Bennett, vice-presidente de recomendações da Netflix na épo
competição, por que ofereceram um prêmio tão grande. Ele me disse que eu devia perg
por que o prêmio era tão pequeno. Uma melhora de 10% em suas recomendações
menor que pareça, recuperaria o milhão em menos tempo do que aquele que se leva
fazer outro filme *Velozes e furiosos*.

## O Facebook sabe que você é um terrorista?

Então, se as corporações com acesso a grandes conjuntos de dados ainda são bas
limitadas no que "sabem" sobre você, o que há para se preocupar?

Tente se preocupar com o seguinte. Suponha que uma equipe do Facebook re
desenvolver um método para adivinhar quais de seus usuários têm probabilidade
envolver em terrorismo contra os Estados Unidos. Matematicamente, isso não é tão dife
assim do problema de descobrir se o usuário da Netflix tem probabilidade de gostar de
*homens e um segredo*. O Facebook em geral sabe os nomes verdadeiros e a localizaç
seus usuários, de modo que pode usar registros públicos para gerar uma lista de per
Facebook pertencentes a pessoas que já tenham sido condenadas por crimes de terro
ou apoio a grupos terroristas. Aí começa a matemática.

Será que os terroristas tendem a fazer mais atualizações diárias que a população em
Ou fazem menos? Ou, sob esse critério, eles parecem basicamente iguais? Há palavra
surgem com mais frequência nas suas atualizações? Bandas, times ou produtos de qu
gostam mais ou menos? Juntando todo esse material, é possível atribuir a cada usuário
pontuação[a] que representa a melhor estimativa para a *probabilidade* de que o usuário
ou *venha a ter* laços com grupos terroristas. Essa é mais ou menos a mesma coisa
Target faz quando cruza as referências de suas compras de loção e vitaminas a fim de es
qual a probabilidade de você estar grávida.

Há outra diferença importante: gravidez é algo comum, enquanto terrorismo é
raro. Em quase todos os casos, a probabilidade estimada de que um dado usuário
terrorista seria muito pequena. Assim, o resultado do projeto não seria um centro pré-

um crime antes que ele aconteça. Pense em algo muito mais modesto, digamos, uma li 100 mil usuários sobre quem o Facebook pode afirmar, com algum grau de conf "Pessoas tiradas deste grupo têm mais ou menos o dobro de probabilidade de ser terrc ou simpatizantes do terrorismo que o usuário típico do Facebook."

O que você faria se descobrisse que um sujeito no seu quarteirão está na lista? Cha a polícia?

Antes de dar esse passo, desenhe outro quadro:

| | na lista do Facebook | ausente da lista |
|---|---|---|
| terrorista | 10 | 9.990 |
| não terrorista | 99.990 | 199.890.010 |

O conteúdo do quadro é de cerca de 200 milhões de usuários do Facebook nos Es Unidos. A linha horizontal entre as metades superior e inferior separa futuros terro em cima, de inocentes, embaixo. Qualquer célula terrorista nos Estados Unidos dec bem pequena – digamos, para ser o mais paranoico possível, que haja 10 mil pesso quais a polícia deveria realmente ficar de olho. Isso representa uma em 20 mil, em re ao banco total de usuários.

A linha divisória entre esquerda e direita é aquela feita pelo Facebook. Do lado esq estão as 100 mil pessoas que o Facebook considera que têm elevada chance de envolvir terrorista. Vamos aceitar a palavra do Facebook, de que seu algoritmo é tão bom c pessoas por ele marcadas têm o dobro de chance de serem terroristas que o usuário n Então, nesse grupo, uma em 10 mil, ou dez pessoas, acabarão se revelando terro enquanto 99.990, não.

Se dez dos 10 mil futuros terroristas estão no quadrante superior esquerdo, sobram para o quadrante superior direito. Seguindo o mesmo raciocínio, há 199.990.00 delinquentes no banco de dados do Facebook, dos quais 99.990 foram identificado algoritmo e se encontram na parte inferior esquerda. Restam 199.890.010 pesso quadrante inferior direito. Se você somar os quatro quadrantes, obterá 200 milhões, o todo mundo.

Em algum lugar nesse quadro de quatro partes está seu vizinho de quarteirão. Mas O que você sabe é que ele está na metade esquerda do quadro, porque o Faceb

O que se deve notar é que quase ninguém do lado esquerdo é terrorista. Na verda 99,99% de chance de que seu vizinho seja inocente.

De certo modo, esse é o susto do controle de natalidade e da pílula revisitado. Es lista do Facebook duplica a chance de uma pessoa ser terrorista, o que soa terrível. Ma chance, de início, já é muito pequena; então, quando você a duplica, ela *continua* mín

Existe, porém, outro jeito de olhar, que esclarece ainda mais quanto pode ser con traiçoeiro um raciocínio sobre a incerteza. Pergunte a si mesmo o seguinte: se uma p não é de fato um futuro terrorista, qual a chance de ela aparecer, injustamente, na lis Facebook?

No quadro, isso significa: se você está na metade inferior, qual a chance de aparec lado direito?

Isso é muito fácil de calcular. Há 199.990.000 pessoas na metade inferior do qu dessas, meras 99.990 estão do lado esquerdo. Então, a chance de uma pessoa inocen marcada como potencial terrorista pelo algoritmo do Facebook é

$$\frac{99.990}{199.990.000}$$

ou cerca de 0,05%.

Isso mesmo, uma pessoa inocente tem apenas uma chance em 2 mil de ser identi erradamente pelo Facebook como terrorista!

*Agora*, como você se sente em relação a seu vizinho?

O raciocínio que governa os valores-*p* nos dá uma orientação clara. A hipótese que o seu vizinho não seja um terrorista. Por essa hipótese – isto é, presumindo-s inocência –, a chance de ele aparecer na lista do Facebook é de mero 0,05%, bem abai limiar de uma chance em vinte de significância estatística. Em outras palavras, pelas que governam a maior parte da ciência contemporânea, você estaria justificado ao rej hipótese nula e declarar seu vizinho terrorista.

Exceto que há uma chance de 99,99% de ele não ser terrorista.

Por outro lado, dificilmente há alguma chance de uma pessoa inocente ser identi como terrorista pelo algoritmo. Ao mesmo tempo, as pessoas que o algoritmo indic quase todas inocentes. Parece um paradoxo, mas não é. Simplesmente, é assim que as são. Se você respirar fundo e mantiver o olho no box, não há como errar.

Eis o xis do problema. Há realmente duas perguntas a serem feitas. Elas parecem iguais, mas não são.

Pergunta 1. Qual a chance de uma pessoa ser colocada na lista do Facebook, conside que ela não seja terrorista?

Pergunta 2. Qual a chance de uma pessoa não ser terrorista, considerando que est lista do Facebook?

Um modo de saber que as duas perguntas são diferentes é que elas têm resp diferentes, muito diferentes. Já vimos que a resposta da primeira pergunta é cerca de em 2 mil, enquanto a resposta da segunda é 99,99%. É a resposta da segunda pergunt você quer de fato.

As grandezas que essas perguntas contemplam são chamadas *probabilidades condic* – "a probabilidade de ocorrer X, dado que ocorre Y". Estamos nos debatendo aqui c questão: a probabilidade de X, dado Y, não é a mesma que a probabilidade Y, dado X.

Se isso soa familiar, deve soar mesmo, porque é exatamente o mesmo problem *reductio ad* improvável. O valor-*p* é a resposta da questão:

> "A chance de que um resultado experimental observado ocorra, dado que a hipótes esteja correta."

Mas o que *queremos* saber é a outra probabilidade condicional:

> "A chance de que a hipótese nula esteja correta, dado que observamos determ resultado experimental."

O perigo surge precisamente quando confundimos a segunda grandeza com a prir Essa confusão está em toda parte, não só nos estudos científicos. Quando o pror distrital inclina-se para o júri e anuncia "Há apenas uma chance em 5 milhões, eu r uma chance em 5 milhões, de que um homem inocente tivesse um DNA que combi com a amostra encontrada na cena do crime", ele está respondendo à pergunta: qual s probabilidade de uma pessoa inocente parecer culpada? Mas a função do júri é respor segunda pergunta: qual a probabilidade de um réu que pareça culpado ser inocente? I uma questão que o promotor distrital não pode ajudar o júri a responder.[b]

O EXEMPLO DO FACEBOOK e dos terroristas deixa claro por que você deve se preocupai os maus algoritmos tanto quanto com os algoritmos bons. Talvez até mais. É chato e quando você está grávida e a Target sabe disso. Mais chato e pior ainda é se você terrorista e o Facebook acha que você é.

Você poderia muito bem pensar que o Facebook jamais elaboraria uma lista de pote terroristas (ou sonegadores de impostos, ou pedófilos), nem que tornaria a lista públ chegasse a elaborá-la. Por que haveria de fazer isso? Onde entra o dinheiro nisso? T você esteja certo. Mas a National Security Agency (NSA) também coleta dados sol pessoas nos Estados Unidos, estejam elas no Facebook ou não. A menos que você ach estão gravando os metadados de todas as suas ligações telefônicas só para dar às emp de telefonia celular bons conselhos sobre onde construir novas torres de sinal, ten elaborado algo como uma lista de alerta. Grandes dados não são mágica e não dizer federais quem é terrorista e quem não é. Mas não precisa ser mágico para gerar longas de pessoas que, de algum modo, estão marcadas com um sinal de alerta, de alto risco,

"pessoa de interesse". A maioria das pessoas nessas listas não tem nada a ver com terror Que certeza você tem de não figurar numa delas?

## Telepatas de rádio e a regra de Bayes

De onde vem o aparente paradoxo da lista de alerta terrorista? Por que o mecanism valor-*p*, que parece tão razoável, funciona tão mal nesse contexto? Aqui está a chave: o *p* leva em conta a proporção de pessoas que o Facebook identifica (cerca de uma em 2 porém ignora totalmente a proporção de pessoas que são terroristas. Quando você decidir se o seu vizinho é um terrorista secreto, você tem informação crítica ant dizendo que a maioria das pessoas não é terrorista! Você ignora esse fato correndo seu Exatamente como R.A. Fisher disse, você precisa avaliar cada hipótese "à luz da evid do que você já sabe a respeito.

Mas o que fazer?

Isso nos leva à história dos telepatas de rádio.

Em 1937, a telepatia estava na moda. O livro do psicólogo J.B. Rhine, *Parapsico fronteira científica da mente*, que apresentava extraordinários argumentos sobre experi tos com percepção extrassensorial (PES) da Universidade de Duke, em tom delicadar sóbrio e quantitativo, era um best-seller e uma recomendação do Clube do Livro do Poderes psíquicos eram um tema quente nas conversas de coquetel por todo o país.[8] U Sinclair, aclamado autor de *A selva*, lançou em 1930 um livro inteiro, *Mental Radio*, seus experimentos em comunicação psíquica com sua esposa, Mary. O tema era tão can que Albert Einstein contribuiu com um prefácio para a edição alemã, deixando por pouco de endossar a telepatia, mas registrando que o livro de Sinclair "merece as mais considerações" por parte dos psicólogos.

Naturalmente os órgãos de comunicação de massa queriam participar da loucura. de setembro de 1937, a Zenith Radio Corporation, em colaboração com Rhine, lan ambicioso experimento de um tipo possibilitado apenas pela nova tecnologia da comu ção que eles comandavam. Cinco vezes o apresentador girava uma roleta, enquant grupo de autodenominados telepatas olhava para ela. A cada girada, a bola caía no pre no vermelho, e os sensitivos se concentravam com toda a intensidade na cor aprop transmitindo o sinal pelo país através de seu próprio canal de difusão. Implorava-s ouvintes da emissora que usassem seus poderes psíquicos para captar a transmissão m e escrever para a emissora de rádio a sequência de cinco cores que tinham recebido. de 40 mil ouvintes responderam ao primeiro pedido. Mesmo em programas poster depois que já não era mais novidade, a Zenith recebia milhares de respostas por se Aquilo era um teste de poderes psíquicos numa escala que Rhine poderia ter realiza sujeito em sujeito, no seu consultório na Duke, uma espécie de protoevento de gr conjuntos de dados.

No fim, os resultados do experimento não foram favoráveis à telepatia. Mas os acumulados das respostas acabaram se revelando úteis para os psicólogos de uma f

inteiramente diferente. Os ouvintes estavam tentando reproduzir sequências de pr
vermelhos (doravante P e V) produzidas por cinco giradas de uma roleta. Há 32 sequ
possíveis:

| | | | |
|---|---|---|---|
| PPPPP | PPVPP | PVPPP | PVVPP |
| PPPPV | PPVPV | PVPPV | PVVPV |
| PPPVP | PPVVP | PVPVP | PVVVP |
| PPPVV | PPVVV | PVPVV | PVVVV |
| VPPPP | VPVPP | VVPPP | VVVPP |
| VPPPV | VPVPV | VVPPV | VVVPV |
| VPPVP | VPVVP | VVPVP | VVVVP |
| VPPVV | VPVVV | VVPVV | VVVVV |

todas elas igualmente prováveis de sair, uma vez que cada girada da roleta tem a m
probabilidade de dar vermelho ou preto. Como os ouvintes não estavam realmente
bendo nenhuma emanação psíquica, seria de esperar que suas respostas também fo
equitativamente tiradas das 32 opções.

Mas não. Na verdade, os cartões enviados pelos ouvintes foram altamente não unifor
Sequências como PPVPV e PVVPV apresentavam frequência muito maior que o previsto
acaso, enquanto sequências como VPVPV eram menos frequentes do que deveriam, e V
quase não aparecia.

Isso provavelmente não é surpresa. VVVVV, de algum modo, não *dá a impressão*
uma sequência aleatória da mesma forma que PPVPV, embora as duas sejam igual
prováveis quando se gira a roleta. O que acontece? A que nos referimos quando diz
que uma sequência de letras é "menos aleatória" que outra?

Eis outro exemplo. Rápido, pense em um número de 1 a 20.

Você escolheu 17?

Tudo bem, o truque nem sempre funciona, contudo, se você pedir às pessoa
escolham um número entre 1 e 20, 17 é a escolha mais comum.[10] Se você pedir um nú
entre 0 e 9, o mais mencionado é 7.[11] Números que terminam em 0 e 5, em contrast
escolhidos muito mais raramente que o previsto pelo acaso – eles simplesmente *pa*
menos aleatórios para as pessoas. Isso leva a uma ironia. Da mesma forma que os pa
pantes da telepatia via rádio tentaram acertar sequências de v e p, produzindo resul
notavelmente não aleatórios, as pessoas que escolhem números ao acaso tendem a
opções que se desviam visivelmente da aleatoriedade.

Em 2009, o Irã teve uma eleição presidencial, que o já detentor do cargo Mah
Ahmadinejad ganhou por larga margem. Houve generalizadas acusações de que a e
fora fraudada. Mas como esperar a legitimidade do voto num país cujo governo não per
quase nenhuma supervisão independente?

Dois estudantes de pós-graduação em Columbia,[12] Bernd Beber e Alexandra S
tiveram a inteligente ideia de usar os próprios números como evidência de fraude, obri

Irã, um total de 116 números. Se estes fossem votos verdadeiros, não deveria haver m para que os últimos dígitos desses números não fossem aleatórios. Eles deveriam distribuídos com a mesma regularidade entre os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, cad aparecendo 10% das vezes.

Não foi assim que a contagem de votos no Irã se apresentou. Havia muitos núr terminados com 7, quase o dobro do que deveria haver. Eles não pareciam dígitos deri de um processo aleatório, mas anotados por seres humanos que tentavam fazê-los *p* aleatórios. Isso por si só não é uma prova de que a eleição foi fraudada, mas é uma evid nesse sentido.[c]

Seres humanos estão sempre inferindo, sempre usando observações para aprimorar avaliação das várias teorias concorrentes que se imiscuem em nossa representação m do mundo. Nós temos muita confiança, uma confiança quase inabalável, em algum nossas teorias ("O sol vai nascer amanhã", "Quando você derruba uma coisa, ela c menos segurança em relação a outras ("Se eu fizer exercício hoje, vou dormir bem à "Não existe algo como telepatia"). Temos teorias sobre coisas grandes e coisas peq coisas que encontramos todo dia e com que deparamos apenas uma vez. À medid encontramos evidências a favor e contra essas teorias, nossa confiança nelas oscila para e para baixo.

Nossa teoria-padrão sobre as roletas é que elas são bastante equilibradas, e que tem igual probabilidade de cair no vermelho ou no preto. Mas há teses concorre digamos, a roleta está viciada a favor de uma cor ou de outra.[d] Vamos simplificar as co supor que haja apenas três teorias disponíveis:

VERMELHA. A roleta está viciada de modo a fazer a bola cair no vermelho 60% das v
HONESTA. A roleta é honesta, então a bola cai metade das vezes no vermelho e meta vezes no preto.
PRETA. A roleta está viciada de modo a fazer a bola cair no preto 60% das vezes.

Que crédito você atribui a cada uma dessas três teorias? Provavelmente você te pensar que as roletas são honestas, a não ser que haja motivo para crer no contrário. você ache que há uma chance de 90% de que Honesta seja a teoria certa, e há apenas chance para cada uma das outras, Preta e Vermelha. Podemos desenhar um quadr isso, exatamente como fizemos com a lista do Facebook:

| PRETA | HONESTA | VERMELHA |
|---|---|---|
| 0,05 | 0,9 | 0,05 |

O quadro registra o que chamamos, no jargão das probabilidades, de probabilid

diferentes podem ter apriorismos diferentes. Um cínico empedernido pode atribuir p bilidade de ⅓ para cada teoria, enquanto alguém com uma crença realmente firme na re dos fabricantes de roletas pode atribuir apenas 1% de probabilidade para Vermelha e

Mas esses apriorismos não estão fixos no lugar. Se somos apresentados a evidê favorecendo uma teoria em relação a outra – digamos, a bola cai cinco vezes seguid vermelho –, nossos níveis de crença nas diferentes teorias podem mudar. Como isso teceria nesse caso? O melhor jeito de descobrir é calcular mais probabilidades condici e desenhar um quadro maior.

Qual a probabilidade de que, girando a roleta cinco vezes, obtenhamos VVVVV? A res depende de qual teoria é verdadeira. Pela teoria Honesta, cada girada tem ½ de char dar vermelho, então, a probabilidade de ver VVVVV é

$$\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} = 3{,}125\%$$

Em outras palavras, VVVVV tem exatamente a mesma probabilidade que qualquer das outras 31 alternativas.

Mas se Preta é verdadeira, há apenas 40% ou 0,4 de chance de sair vermelho a girada, então a chance de VVVVV é

$$(0{,}4) \times (0{,}4) \times (0{,}4) \times (0{,}4) \times (0{,}4) = 1{,}024\%$$

E se Vermelha é verdadeira, então cada girada tem 60% de chance de dar vermelh chance total é

$$(0{,}6) \times (0{,}6) \times (0{,}6) \times (0{,}6) \times (0{,}6) = 7{,}76\%$$

Agora vamos expandir o quadro de três para seis partes.



As colunas continuam correspondendo às três teorias, Preta, Honesta, e Vermelha agora dividimos cada coluna ao meio, uma parte correspondendo ao resultado VV outra ao resultado de *não* VVVVV. Já fizemos toda a matemática necessária para desc que números vão para cada parte. Por exemplo, a probabilidade a priori de que Honest

0,0281, vai para o quadro onde Honesta é correta e as bolas dão vvvvv. Os outros 0,871 para a divisão "Honesta correta, não VVVVV", de modo que a coluna Honesta cor somando 0,9 no total.

A probabilidade a priori de cair na coluna Vermelha é de 0,05. Então, a chan Vermelha ser verdadeira e de a bola cair VVVVV é de 7,76% de 5%, ou 0,0039. Isso 0,0461 para a divisão "Vermelha verdadeira, não VVVVV".

A teoria Preta também tem uma probabilidade a priori de 0,05. Mas ela não chega de considerar VVVVV. A chance de Preta ser verdadeira e sair VVVVV é de apenas 1,02 5%, ou 0,0005.

Eis o quadro preenchido:

| | PRETA | HONESTA | VERMELHA |
|---|---|---|---|
| não VVVVV | 0,0495 | 0,872 | 0,0461 |
| VVVVV | 0,0005 | 0,028 | 0,0039 |

(Observe que os números em todas as seis divisões somam 1; é assim que deve ser, p as seis divisões representam todas as situações possíveis.)

O que acontece com nossas teorias se girarmos a roleta e obtivermos, *sim*, VVVVV? De ser boa notícia para Vermelha e péssima notícia para Preta. E é isso mesmo que v Obter cinco vermelhos seguidos significa que estamos na metade inferior do quadro d divisões, onde há 0,0005 na Preta, 0,028 na Honesta e 0,0039 na Vermelha. Em o palavras, considerando que vimos vvvvv, nosso novo julgamento é que Honesta é cer sete vezes mais provável que Vermelha, e Vermelha cerca de oito vezes mais prováv Preta.

Se você quer traduzir essas proporções em probabilidades, só precisa lembrar probabilidade de *todas* as alternativas tem de ser 1. A soma dos números na metade in é aproximadamente 0,0325, então, para que a soma total seja 1, sem mudar as propo basta dividir cada número por 0,0325. Aí ficamos com:

1,5% de chance de Preta estar correta.
86,5% de chance de Honesta estar correta.
12% de chance de Vermelha estar correta.

A medida da sua crença em Vermelha mais que dobrou, enquanto sua crença em foi quase eliminada. Como deve ser! Se você vê cinco vermelhos seguidos, por qu desconfiar um pouco mais seriamente do que desconfiava antes de o jogo começar?

Aquele passo de "dividir tudo por 0,0325" pode parecer um truque arranjado. M

imagem que as pessoas apreciam mais. Imagine que haja 10 mil roletas. E que haja 1 salas, cada qual com uma roleta, cada roleta com uma pessoa jogando. Uma dessas pe acompanhando uma dessas roletas, é você. Mas você não sabe que roleta lhe deram situação de desconhecimento sobre a verdadeira natureza da roleta pode ser mod supondo que, das 10 mil roletas originais, quinhentas são viciadas para dar preto, quinh são viciadas para dar vermelho e 9 mil são honestas.

O cálculo que acabamos de fazer lhe diz para esperar que cerca de 281 das r Honestas, cerca de 39 das roletas Vermelhas e apenas cinco das roletas Pretas deem V Assim, se você tirar um VVVVV, ainda não sabe em qual das 10 mil salas está, mas re um bocado as possibilidades; você está em uma das 325 salas em que a bola caiu cinco seguidas no vermelho. Dessas salas, 281 (cerca de 86,5%) têm roletas Honestas, 39 (cer 12%) têm roletas Vermelhas e apenas cinco (1,5%) têm roletas Pretas.

Quanto mais as bolas caem no vermelho, mais favoravelmente você irá olhar para a Vermelha (e menos crédito dará à Preta). Se viu dez vermelhos seguidos, em vez de o mesmo cálculo aumentará sua estimativa de probabilidade de Vermelha para 25%.

O que fizemos foi calcular como os nossos graus de crédito nas várias teorias dev variar depois de termos visto cinco vermelhos seguidos – que são conhecidas como p bilidades a posteriori. Exatamente como as probabilidades a priori descrevem suas cr antes de você ver a evidência, as probabilidades a posteriori descrevem suas crenças d da evidência. O que estamos fazendo é chamado de *inferência bayesiana*, porque a pass de a priori para a posteriori se apoia numa velha fórmula algébrica em probabil chamada *teorema de Bayes*. Esse teorema é uma expressão algébrica curta, e eu po mostrá-la a você aqui e agora. Mas vou tentar não fazer isso, porque às vezes uma fór se você se treina a aplicá-la mecanicamente, sem pensar na situação, pode obscurecer está realmente acontecendo. Tudo que você precisa saber sobre o que eu vou fazer a pode ser visto no quadro anterior.[e]

O A POSTERIORI é afetado pela evidência que você encontra, mas também pelo seu a p O cínico, que começou com um a priori atribuindo probabilidade de $\frac{1}{3}$ para cada t responderia a cinco vermelhos seguidos com um julgamento a posteriori de que Ver tinha 65% de chance de estar correta. A alma crédula que começa atribuindo apenas probabilidade à Vermelha ainda dará uma chance de 2,5% de Vermelha estar certa, m depois de ver cinco vermelhos seguidos.

No contexto bayesiano, quanto você acredita em alguma coisa *depois* de ver a evid depende não só do que a evidência mostra, mas de quanto você acreditava na coisa começo.

Isso pode parecer problemático. A ciência não é objetiva? Você gostaria de dizer qu crenças se baseiam apenas nas evidências, não em alguns prejulgamentos que você já Mas vamos encarar a realidade, ninguém realmente forma suas crenças dessa manei um experimento forneceu evidência estatisticamente significativa de que a nova varia uma droga existente desacelerou o crescimento de certos tipos de câncer, é prováve

a aceitar, ressentido, que as antigas formações estariam concentrando energia vibra( da terra sobre o corpo e atacando os tumores? Você não aceitaria, porque é malu( Pensaria que Stonehenge deu sorte. Você tem diferentes a priori acerca dessas duas te e por conseguinte interpreta as evidências de maneira diferente, apesar de elas s numericamente iguais.

A mesma coisa ocorre com o algoritmo do Facebook para encontrar terrorista vizinho ao lado. A presença do vizinho na lista realmente fornece alguma evidência ( ser terrorista em potencial. Mas seu a priori para essa hipótese deveria ser muito peq porque a maioria das pessoas não é terrorista. Assim, apesar da evidência, sua probabil a posteriori também é pequena, e você não se preocupa com isso – ou não deve preocupar.

Apoiar-se puramente no teste de significância da hipótese nula é algo profundar não bayesiano – estritamente falando, o teste nos pede que tratemos a droga contra o c e o Stonehenge de plástico exatamente com o mesmo respeito. Será este um golpe na de Fisher sobre a estatística? Ao contrário. Quando Fisher fala que "nenhum pesqui científico tem um nível de significância fixo a partir do qual, de ano a ano, e em to( circunstâncias, ele rejeite hipóteses; ele prefere considerar cada caso particular à luz ( evidência e suas ideias", está dizendo exatamente que a inferência científica não po( pelo menos não deveria, ser realizada de forma puramente mecânica; devemos permit nossas ideias e crenças preexistentes desempenhem sempre algum papel.

Não que Fisher fosse um estatístico bayesiano. Essa frase, nos dias atuais, refere-s estatística, a um conjunto de práticas e ideologias que um dia foram inimagináveis, ma agora são a corrente principal, e ela inclui uma simpatia geral em relação a argum baseados no teorema de Bayes – embora não seja uma simples questão levar em conta as crenças prévias quanto as novas evidências. O bayesianismo tende a ser mais popul gêneros de inferência (como ensinar máquinas a aprender a partir de uma ampla esc informações humanas) que se ajustam muito pouco às questões do tipo sim ou não, bem-adaptadas à abordagem de Fisher.

Na verdade, estatísticos bayesianos muitas vezes nem chegam a pensar na hipótese Em vez de indagar "Essa nova droga tem algum efeito?", estão mais interessados num p melhor para um modelo de predição que governe os efeitos da droga em várias dose populações diferenciadas. Quando chegam a mencionar a hipótese nula, sentem-se vamente à vontade para falar sobre a probabilidade de uma hipótese – por exempl( essa nova droga funcione melhor que a já existente – ser verdadeira. Fisher, não. E visão, a linguagem da probabilidade era utilizada apropriadamente apenas num co em que tivesse lugar um processo real de acaso.

Nesse ponto, chegamos às margens de um oceano de dificuldades filosóficas, n( mergulharemos um ou dois dedos do pé, no máximo.

Em primeiro lugar, quando chamamos o teorema de Bayes de teorema, isso suge estamos discutindo verdades incontroversas, certificadas por prova matemática. Isso é é verdade, e tem a ver com a difícil questão de saber o que queremos dizer quando fal em "probabilidade". Quando falamos que há 5% de chance de que Vermelha seja verda

quais exatamente uma entre vinte está viciada para dar vermelho 3/5 das vezes, e que qua roleta dada que encontremos seja pega ao acaso dessa multidão de roletas. Se é iss queremos dizer, então o teorema de Bayes é fato consumado, semelhante à lei dos gr números, que vimos no capítulo anterior. Ele diz que, a longo prazo, nas condiçõe estabelecemos no exemplo, 12% das roletas que deem VVVVV serão do tipo que favor vermelho.

Mas não é realmente disso que estamos falando. Quando dizemos que há 5% de c de Vermelha ser verdadeira, não estamos fazendo uma afirmação sobre a distribuição g de roletas viciadas (como poderíamos saber?), e sim sobre nosso próprio estado m Cinco por cento é o *grau em que acreditamos* que uma roleta que encontramos esteja vi para o vermelho.

Por sinal, esse foi o ponto em que Fisher desembarcou de vez do ônibus. Ele esc uma implacável crítica do *Treatise on Probability*, de John Maynard Keynes, no q probabilidade "mede o 'grau de crença racional' a que uma proposição tem direito à l determinada evidência". A opinião de Fisher sobre esse ponto de vista está bem sintet nas linhas finais: "Se as opiniões da última seção do livro do sr. Keynes fossem aceitas competentes pelos estudantes de matemática deste país, eles virariam as costas, alguns aversão, a maioria com desprezo, para um dos mais promissores ramos da maten aplicada."[13]

Para aqueles que estão dispostos a adotar a visão da probabilidade como grau de cr o teorema de Bayes pode ser visto não como uma mera equação matemática, mas uma forma de conselho com sabor numérico. Ele nos dá uma regra, que podemos opta seguir ou não, para como devemos atualizar nossas crenças sobre as coisas à luz de observações. Nessa forma nova, mais geral, as crenças são naturalmente tema de de muito mais ferozes. Há bayesianos linha-dura que acham que *todas* as nossas cr deveriam ser formadas por estritos cálculos bayesianos, ou pelo menos por cálculo estritos quanto possível, a partir de nossa cognição limitada; outros encaram a reg Bayes mais como uma linha diretriz qualitativa menos rígida.

A visão bayesiana já é suficiente para explicar por que VPVVP parece aleatório, enq VVVVV não, ainda que ambos sejam igualmente improváveis. Quando vemos VVVVV fortalece uma teoria – a teoria de que a roleta é viciada para dar vermelho – à q havíamos atribuído alguma probabilidade a priori. Mas e VPVVP? Seria possível ima alguém andando por aí com uma postura mental inusitadamente aberta em relação a ro que atribui alguma probabilidade modesta à teoria de que a roleta foi ajustada a máquina de Rube Goldberg,[f] projetada para produzir o resultado vermelho, preto, vern vermelho, preto. Por que não? E essa pessoa, observando VPVVP, iria julgar a teoria bem respaldada.

Mas não é assim que as pessoas reais reagem aos giros da roleta quando sai vern preto, vermelho, vermelho, preto. Nós não nos permitimos considerar toda teoria ri que possamos logicamente divisar. Nossos a priori não são *planos*, mas *cheios de p* Atribuímos um bocado de peso mental a poucas teorias, enquanto outras, como a vpvvp, recebem uma probabilidade quase indistinguível de zero. Como escolhemos r

mais de teorias que se apoiem em coisas que já sabemos que das que apresentam fenôn
totalmente novos. Pode parecer um preconceito injusto, mas, sem alguns preconc
correríamos o risco de sair por aí em constante estado de perplexidade. Richard Fey
captou brilhantemente esse estado de espírito:

> Sabem, esta noite aconteceu comigo uma das coisas mais impressionantes. Eu estava vindo para cá, a caminho
> e entrei pelo estacionamento. Vocês não acreditam no que aconteceu. Vi um carro com a placa ARW 357.
> imaginar? De todos os milhões de placas no estado, qual era a chance de eu ver essa placa particular, est
> Impressionante![14]

Se você já usou a substância psicotrópica semi-ilegal mais popular dos Estados U
sabe qual a sensação de ter a priori planos demais. Cada estímulo que saúda voc
importa quão corriqueiro, parece *intensamente significativo*. Cada experiência capt
atenção e exige que você se detenha nela. Esse é um estado mental muito interessante, p
não serve para fazer boas inferências.

O ponto de vista bayesiano explica por que Feynman na verdade não ficou impressio
já que ele atribui probabilidade a priori muito baixa à hipótese de que uma força có
pretendia que ele visse a placa ARW 357 naquela noite. Isso explica por que cinco verm
seguidos nos dão uma sensação “menos aleatória” que VPVVP: o primeiro caso ativa a
Vermelha, à qual atribuímos alguma probabilidade a priori não desprezível, e o seg
não a ativa. Um número terminado em 0 dá uma sensação menos aleatória que um nú
terminado em 7 porque o primeiro sustenta a teoria de que o número que estamos
não é um valor preciso, mas uma estimativa.

Esse contexto também ajuda a deslindar alguns dos enigmas com que deparamo
que ficamos surpresos e um pouco desconfiados quando a loteria dá 4, 21, 23, 34, 39
vezes seguidas, mas não quando dá 4, 21, 23, 34, 39 um dia e 16, 17, 18, 22, 39 n
seguinte, mesmo que ambos os eventos sejam igualmente improváveis? Implicitan
você tem algum tipo de teoria no fundo da cabeça, a teoria de que os jogos de loteri
alguma razão, não têm probabilidade de cuspir duas vezes seguidas os mesmos nún
Talvez porque você pense que jogos de loteria são arranjados pelos seus administra
talvez porque ache que uma força cósmica apreciadora da sincronicidade tenha um
no resultado, não importa. Você pode não acreditar muito intensamente nessa teoria.
no íntimo julgue que existe uma chance em 100 mil de que realmente haja uma tendê
favor dos números repetidos. Mas isso é muito mais que a probabilidade a priori que
atribui ao conjunto 4, 21, 23, 34, 39 e 16, 17, 18, 22, 39. *Essa* teoria é maluca e você nã
doidão, então, não ligue para ela.

Se você se perceber acreditando parcialmente numa teoria maluca, não se preo
Provavelmente a evidência que você vai encontrar será inconsistente com ela, puxand
baixo seu grau de crença na maluquice até que suas crenças entrem em sintonia com
todo mundo. A não ser que a teoria maluca seja projetada para sobreviver a esse pro
de ajuste. É assim que funcionam as teorias da conspiração.

Suponha que você fique sabendo por um amigo de confiança que o atentado na Mar
de Boston tenha sido um serviço interno, executado pelo governo federal para,
arregimentar apoio para os grampos telefônicos da NSA. Vamos chamar isso de teoria

mente alta, por exemplo, 0,1. Mas aí você encontra outras informações: a polícia loca os suspeitos, o suspeito sobrevivente confessou etc. Cada uma das peças de informa bastante improvável, considerando T, e cada uma delas derruba um pouco seu gr crença em T, até que finalmente você mal acredita na teoria.

É por isso que seu amigo não vai lhe apresentar a teoria T. Ele vai adicionar a ela a U: o governo e a mídia estão juntos nessa conspiração, os jornais e as emissoras a fornecem informação falsa para apoiar a história de que o ataque foi executado por ra islâmicos. A teoria combinada, T + U, deve começar com uma probabilidade a ligeiramente menor; ela é, por definição, mais difícil de acreditar que T, porque lhe pec engula tanto T quanto outra teoria ao mesmo tempo. No entanto, à medida que vai a cendo a evidência, que tenderia a matar T sozinha,[g] a teoria combinada T + U perm intocada. Dzhokar Tsarnaev condenado? Bem, claro, é *exatamente* o que se esperar uma corte federal – o Departamento de Justiça está totalmente envolvido no caso! A U atua como uma espécie de cobertura bayesiana para T, fazendo com que a nova evid a confirme e depois se dissolva. Essa é uma propriedade que as teorias mais excêntrica em comum: estão encapsuladas em material protetor suficiente para se tornar consist com muitas observações possíveis, ficando difícil desarmá-las. São como o *E. coli* do si de informação, resistentes a múltiplas drogas. De modo obtuso, é preciso admirá-las.

## O Gato de Cartola, o homem mais limpo da escola e a criação do Univers

Quando eu estava na faculdade, tinha um amigo com hábitos empreendedores que ideia de ganhar um dinheirinho extra no começo do ano letivo fazendo camisetas estudantes do primeiro ano. Naquela época, era possível comprar um monte de cam direto da loja por cerca de US$ 4 cada, enquanto o preço no campus era de US$ 10. Is no começo dos anos 1990, e estava na moda ir a festas com uma cartola do tipo usado protagonista do filme *O Gato*.[h] Então meu amigo juntou US$ 800 e imprimiu umas duz camisetas com a figura do Gato de Cartola tomando uma caneca de cerveja. Essas cam venderam rapidinho.

Meu amigo era empreendedor, mas *nem tanto assim*. Na verdade, era meio pregu E depois de ter vendido oitenta camisetas, recuperando seu investimento inicial, con a perder a vontade de ficar parado no pátio o dia todo vendendo. Então a caixa de cam foi para baixo de sua cama.

Uma semana depois, chegou o dia de lavar roupa. Meu amigo, como mencione preguiçoso. Realmente não tinha a menor paciência para lavar roupa. Aí lembrou-se d tinha debaixo da cama uma caixa de camisetas novinhas do Gato de Cartola ton cerveja. Isso resolveu o problema do dia de lavar roupa. Como se viu, também resol problema do dia seguinte ao dia de lavar roupa. E assim por diante.

Aí estava a ironia. Todo mundo achava que meu amigo era o cara mais sujo da e porque vestia a mesma camiseta todo dia. Na verdade, era o cara *mais limpo*, pois tod botava uma camiseta novinha em folha!

Lições sobre inferência: você precisa tomar cuidado em relação ao universo de t que considera. Do mesmo modo que há mais de uma solução para a equação quadr pode haver múltiplas teorias na origem da mesma observação. Se não considerarmos t nossas inferências podem nos deixar totalmente extraviados.

Isso nos traz de volta ao Criador do Universo.

O argumento mais famoso a favor de um mundo criado por Deus é o chamado argum do projeto, ou do design, que, em sua forma mais simples, diz que – caramba, basta *o sua volta* – o mundo é muito complexo e impressionante, então, como você ainda ach tudo isso se juntou sem mais nem menos, por obra do puro acaso e das leis da física?

Ou, falando em termos formais, como o teólogo liberal William Paley, no livro *N Theology; or, Evidences of the Existence and Attributes of the Deity, Collected fro Appearances of Nature*, de 1802:

> Ao atravessar um charco, suponho ter batido meu pé contra uma *pedra*, e me indaguei como a pedra fora parar possível responder o contrário, que, pelo que eu soubesse, ela estivera lá desde sempre. Talvez tampouco foss fácil expor o absurdo dessa resposta. Mas suponha que eu tivesse encontrado no chão um *relógio*, e então seria perguntar como o relógio fora parar naquele local. Dificilmente eu pensaria na resposta que dei antes – que, p eu soubesse, o relógio estivera lá desde sempre. … Então pensamos: é inevitável a inferência de que o relógio d um fabricante, que em algum momento, em algum lugar, deve ter havido um artífice, ou artífices, que o criou propósito que, segundo julgamos, ele deve atender, e que orientou sua construção e seu projeto de uso.

Se isso vale para um relógio, quanto mais para um pardal, ou um olho humano, cérebro humano?

O livro de Paley foi um tremendo sucesso, passando por quinze edições em quinze a Darwin o leu na faculdade, dizendo depois: “Não acho que algum dia tenha admirado um livro que *Natural Theology* de Paley. Antigamente eu poderia quase citá-lo de Formas atualizadas do argumento de Paley são a espinha dorsal do moderno movime favor do projeto inteligente. Que, obviamente, é uma clássica *reductio ad* improvável.

- Se Deus não existe, seria improvável que coisas tão complexas quanto os humanos tivessem se desenvolvido.
- Os seres humanos se desenvolveram.
- Logo, é improvável que Deus não exista.

Isso se aproxima muito do argumento que os decifradores de códigos da Bíblia usa se Deus não escreveu a Torá, seria improvável que o texto do rolo fosse um registro tã dos aniversários dos rabinos!

A essa altura você deve estar enjoado de me ouvir dizer isso, mas a *reductio ad* impro nem sempre funciona. Se *realmente* temos intenção de computar em termos numéri grau de confiança que devemos ter em relação a Deus ter criado o Universo, é m desenhar outro quadro de Bayes.

| | DEUS | NÃO DEUS |
|---|---|---|
| nós não existimos | | |
| nós existimos | | |

A primeira dificuldade é entender os a priori. Essa é de dar tratos à bola. Para as rc nós perguntamos: que probabilidade imaginamos que a roleta tenha de estar fraudada de vermos qualquer um dos resultados? Agora indagamos: qual a probabilidade de que exista sem saber que o Universo, a Terra ou nós existimos?

Nesse ponto, o movimento habitual é erguer as mãos e invocar o charmosar denominado *princípio da indiferença*. Já que, em termos de princípio, não pode nenhum modo de fingir que não sabemos que existimos, simplesmente dividimos a p bilidade a priori de modo equitativo, 50% para Deus e 50% para Não Deus.

Se Não Deus é uma sentença verdadeira, então seres complexos como os homens d ter surgido por puro acaso, talvez induzidos, ao longo dos tempos, pela seleção natura outras épocas e agora, os adeptos da existência de um projeto ou design concordam qu é um fenômeno improvável. Vamos inventar números e dizer que seria uma chance bilhão de bilhões. Então, o que vai no compartimento inferior direito é 1 bilionésir bilionésimo de 50%, ou uma chance em 2 bilhões de bilhões.

E se Deus é uma sentença verdadeira? Bem, há uma porção de maneiras de Deus e Não sabemos de antemão se um Deus que fez o Universo se incomodaria em criar humanos ou entidades pensantes, mas decerto qualquer Deus digno desse nome t *capacidade* de despertar vida inteligente. Talvez, se houver Deus, haja uma chance milhão de Ele produzir criaturas como nós.

| | DEUS | NÃO DEUS |
|---|---|---|
| nós não existimos | | |
| nós existimos | 1 / 2 milhões | 1 / 2 bilhões de bilhões |

Agora examinemos a evidência, que é: nós existimos. Então, a verdade jaz em a ponto na fileira de baixo. Nela você pode ver claramente que há muito mais probabil

Esse é, em essência, o caso de Paley, o "argumento do projeto", como diria un bayesiano atual. Há muitas objeções sólidas ao argumento do projeto, e há também 2 bi de bilhões de livros combativos sobre o tema de "Você deveria ser um ateu frio com em que você pode ler esses argumentos. Assim, vou me ater aqui àquele que está próximo da matemática, a objeção do "cara mais limpo da escola".

Você provavelmente sabe o que Sherlock Holmes tinha a dizer sobre inferência, a mais famosa que ele já disse sem ser "Elementar!".

"É uma velha máxima minha que, depois de você excluir o impossível, o que sobr mais improvável que seja, deve ser a verdade."

Isso não soa frio, razoável, indiscutível?

Mas não conta a história toda. O que Sherlock Holmes *deveria* ter dito é: "É uma máxima minha que, depois de você excluir o impossível, o que sobra, por mais impro que seja, deve ser a verdade, a menos que a verdade seja uma hipótese que não lhe c considerar."

Mais categórico, menos correto. As pessoas que inferiram que meu amigo era o cara sujo da escola estavam considerando duas hipóteses.

Limpo: meu amigo estava revezando as camisetas, lavando-as e recomeçando o re mento, como uma pessoa normal.

Sujo: meu amigo era um selvagem imundo que usava roupas sujas.

Pode-se começar com algum a priori, baseado na minha memória da facul atribuindo uma probabilidade de 10% para Sujo estar correto. Na verdade, não im muito qual seja seu a priori, Limpo está excluído pela observação de que meu amigo v mesma camiseta todo dia. "Depois que você excluiu o impossível…"

Mas calma aí, Holmes. A verdadeira explicação, Empreendedor preguiçoso, era hipótese que não estava na lista.

O argumento do projeto padece do mesmo problema. Se as duas únicas hipótese você admite são Deus e não Deus, a rica estrutura do mundo pode muito bem ser to como evidência a favor da última contra a primeira.

Mas há outras possibilidades. Que tal Deuses, o mundo montado às pressas pc comitê que batia boca? Muitas civilizações distintas acreditavam nisso. Não se pode que há aspectos do mundo natural – estou aqui pensando nos pandas – que parecem prováveis como resultado de um ressentido acordo burocrático que da mente de divindade onisciente, com total controle criativo. Se começarmos a atribuir a mesma babilidade a priori para Deus e Deuses – por que não, se estamos seguindo o princíp indiferença? –, a inferência bayesiana deveria nos levar a acreditar muito mais em D que em Deus.[i]

Por que parar por aí? A elaboração de histórias sobre a origem não tem fim. Outra com alguns adeptos é a dos *Sims*:[j] não somos realmente pessoas, mas simulações proces num ultracomputador construído por outras pessoas![k] Isso soa bizarro, mas uma pro de gente leva a ideia a sério (o mais famoso, o filósofo Nick Bostrom, de Oxford[18]), e

simulações de eventos do mundo real. Sem dúvida, se a raça humana não extingui mesma, nosso poder de simular irá apenas aumentar, e não parece loucura imagina essas simulações algum dia incluam entidades conscientes que se acreditam pessoas.

Se o *Sims* é verdade, e o Universo é uma simulação construída por pessoas num m mais real, então é bem provável haver pessoas no Universo, porque elas são a coisa c outras preferem simular! Eu diria que é quase uma certeza (levando em conta o exe digamos que é uma certeza absoluta!) que um mundo simulado, criado por seres hun tecnologicamente avançados, teria a presença de seres humanos (simulados).

Se atribuirmos a cada uma das quatro hipóteses que temos até agora uma probabil a priori de ¼, o quadro vai ter mais ou menos a seguinte aparência:

| | DEUS | NÃO DEUS | DEUSES | SIMS |
|---|---|---|---|---|
| nós não existimos | | | | |
| nós existimos | 1 / 4 milhões | 1 / 4 bilhões de bilhões | 1 / 400.000 | 1 / 4 |

Considerando que nós efetivamente existimos, e então a verdade está na fileira de l quase toda probabilidade se encontra em *Sims*. A existência de vida humana é evidên existência de Deus, porém é uma evidência muito *melhor* de que nosso mundo foi pr mado por gente muito mais inteligente que nós.

Advogados do "criacionismo científico" sustentam que deveríamos argumentar er de aula a favor da existência de um projetista ou designer do mundo, não porque a Bí diz – isso seria inconstitucionalmente impróprio! –, mas por motivos friamente razo fundamentados na estarrecedora improbabilidade da existência humana pela hipótes Deus.

Mas se levássemos essa abordagem a sério, diríamos aos nossos alunos da 2ª sér ensino médio algo assim:

> Alguns têm argumentado que é altamente improvável uma coisa tão complexa quanto a biosfera terrestre ter puramente por seleção natural, sem qualquer intervenção externa. De longe a mais provável explicação é c sejamos realmente seres físicos, mas habitantes de uma simulação de computador executada por seres human uma tecnologia inimaginavelmente avançada, cujo propósito não podemos conhecer com exatidão. É possível t que tenhamos sido criados por uma comunidade de deuses, algo parecido com aqueles adorados pelos antigos Há até alguns povos que acreditam que um Deus único criou o Universo, mas essa hipótese deveria ser conside sustentação mais fraca que as alternativas.

Você acha que o Ministério da Educação toparia uma coisa dessas?

É melhor eu ressaltar logo que não acho *realmente* que este seja um bom argumer que somos todos simulações,[19] assim como também não acho que o argumento de para a existência de Deus seja bom para a existência de uma divindade. Ao contrário,

a incômoda sensação de que esses argumentos geram uma indicação de que chegamo limites do raciocínio quantitativo. É costume expressar nossa incerteza sobre algo com número. Às vezes isso até faz sentido.

Quando o meteorologista do noticiário da noite diz "Há 20% de chance de c amanhã", o que ele quer dizer é, em meio a uma grande população de dias passados condições similares às atuais, 20% deles foram seguidos por dias chuvosos. Mas a podemos estar nos referindo quando falamos "Há 20% de chance de que Deus tenha c o Universo"? Decerto isso não quer dizer que um em cada cinco Universos tenha sido por Deus, e o resto surgiu sozinho do nada. A verdade é que nunca vi um método q considere satisfatório para atribuir números à nossa incerteza sobre questões defin desse tipo. Por mais que eu adore números, acho que as pessoas deveriam se ater a "E acredito em Deus" ou "Eu acredito em Deus", ou simplesmente "Eu não tenho certeza mais que adore a inferência bayesiana, julgo que as pessoas provavelmente se dão m chegando à sua fé, ou descartando-a, de maneira não quantitativa. Sobre esse assu matemática se cala.

Se você não aceita isso de mim, aceite de Blaise Pascal, o matemático e filósofo do s XVII que escreveu em *Pensées*: "'Deus é ou Ele não é.' Mas para que lado havemos d inclinar? Aqui, a razão nada pode decidir."

Isso não é tudo que Pascal tinha a dizer sobre o assunto. Retornaremos a seus pensam no próximo capítulo. Mas primeiro a loteria.

---

[a] O método básico chama-se *regressão logística*, caso você queira procurar leituras complementares.

[b] Nesse contexto, a confusão entre a Pergunta 1 e a Pergunta 2 em geral é chamada *falácia do promotor*. O *matemática nos tribunais*, de Coralie Colmez e Leila Schneps (Zahar, 2014), aborda diversos casos reais com esse detalhe.

[c] Fatores de complicação: Beber e Scacco descobriram que os números terminados em zero eram ligeiramente ma do que seria de esperar pelo acaso, mas não tão raros quanto dígitos produzidos artificialmente. E mais: em outro co de dados de uma eleição aparentemente fraudulenta na Nigéria, havia montes de números a mais terminados e Como a maior parte do trabalho dos detetives, isso está longe de ser uma ciência exata.

[d] Reconhecidamente, essa não é uma teoria muito convincente sobre uma roleta convencional, em que as casas al de cor. No entanto, para uma roleta que não se vê, você poderia teorizar que ela tenha mais casas vermelhas que pr

[e] Claro que, se estivéssemos fazendo para valer, teríamos de considerar mais que três teorias. Desejaríamos incluir t a teoria de que a roleta está viciada para dar 55% de vermelho, ou 65%, ou 100%, ou 93,756%, e assim por dia infinitas teorias, não apenas três, e quando os cientistas realizam cálculos bayesianos, precisam lutar com inf infinitesimais, calcular integrais, em vez de simples somas, e assim por diante. Mas essas complicações são mer técnicas; em essência, o processo não é mais profundo do que este que estamos executando.

[f] Rube Goldberg: cartunista e inventor americano, deleitava-se em desenhar máquinas capazes de executar tarefas das formas mais sofisticadas e complicadas possíveis. (N.T.)

[g] Mais precisamente, tende a matar T + não U.

[h] Não, é sério, estava mesmo na moda.

[i] O próprio Paley estava cônscio dessa questão. Note como ele é cuidadoso ao dizer "artífice ou artífices".

[j] *Sims*: popular série de jogos eletrônicos de simulação da vida, lançada em 2000. (N.T.)

[k] Pessoas que, claro, podem ser elas mesmas simulações criadas por pessoas de ordem ainda superior!

PARTE III

# Expectativa

Inclui: garotos do MIT faturam a Loteria Estadual de Massachusett
como Voltaire ficou rico; a geometria da pintura florentina; transmi
que corrigem a si mesmas; a diferença entre Greg Mankiw e Fran
Lebowitz; “Sinto muito, era bofoc ou bofog?”; jogos de salão da Fra
do século XVIII; onde as paralelas se encontram; a outra razão de D
Ellsberg ser famoso; por que você deveria perder mais o avião?

# 11. O que esperar quando você espera ganhar na loteria

Você deve jogar na loteria?

Em geral, é prudente dizer não. O velho ditado nos diz que loterias são "um im sobre a estupidez", proporcionando receita ao governo à custa de pessoas mal-orienta bastante para comprar os bilhetes. Se você vê a loteria como um imposto, é isso m porque as loterias são tão populares quanto os tesouros estatais. Para quantos c impostos as pessoas fazem fila nas lotéricas, a fim de pagar?

A atração das loterias não é novidade. A prática data da Gênova do século XVII,[1] parece ter evoluído por acaso, a partir do sistema eleitoral. A cada seis meses, doi *governatori* da cidade eram escolhidos entre os membros do Pequeno Conselho. Em v realizar uma eleição, Gênova fazia um sorteio, tirando dois gravetos de uma pilha con os nomes dos 120 conselheiros. Não demorou muito para os jogadores da cidade pass a fazer extravagantes apostas paralelas sobre o resultado da eleição. As apostas tornar tão populares que os jogadores começaram a se irritar por ter de esperar até o dia da e para seu prazeroso jogo de azar, e logo perceberam que, se quisessem apostar em pedac de papel tirados de uma pilha, não haveria necessidade de eleição. Números substitu os nomes dos políticos e, por volta de 1700, Gênova fazia correr uma loteria que par muito familiar aos modernos apostadores. Eles apostavam em cinco números tirad acaso, com melhor retorno para a maior quantidade de números acertados.

As loterias se espalharam rapidamente pela Europa e dali para os Estados Unidos. Du a Guerra da Independência, tanto o Congresso Continental quanto os governos esta estabeleceram loterias para financiar a luta contra os britânicos. Harvard, antes de des uma dotação de nove dígitos, fez correr loterias em 1794 e 1810 para financiar dois prédios de faculdades.[2] (Eles ainda são usados como alojamentos para alunos do 1º ar

Nem todo mundo aplaudiu a forma como isso se desenvolveu. Os moralistas achav não estavam errados, que loterias equivaliam a jogatina. Adam Smith também era críti loteria. Em *A riqueza das nações*, escreveu:

> Que a chance de ganho é naturalmente supervalorizada, podemos aprender com o sucesso universal das lot mundo nunca viu e nunca verá uma loteria perfeitamente justa, ou na qual todo o ganho compense toda a porque o organizador nada ganharia com isso. … Numa loteria em que nenhum prêmio excedesse as £ 20, emb outros aspectos, chegasse muito mais perto de algo mais perfeitamente justo que as loterias estatais comuns, não a mesma demanda de bilhetes. Para ter uma chance melhor de alguns dos prêmios mais altos, algumas pessoas ad vários bilhetes; e outras, pequenas participações em número ainda maior. Não há, porém, uma proposição mais na matemática que aquela que diz que, em quanto mais bilhetes você se aventurar, mais probabilidade tem de Aventure-se em todos os bilhetes da loteria, e decerto perderá; quanto maior seu número de bilhetes, mais aproxima dessa certeza.[3]

O vigor do texto de Smith e sua admirável insistência em considerações quantit não devem cegá-lo para o fato de que a conclusão não está, estritamente falando, corr maioria dos que jogam na loteria diria que comprar dois bilhetes em vez de um não au sua probabilidade de ser perdedor, mas dobra a probabilidade de ganhar. E está certo! loteria com uma estrutura de prêmio simples, é fácil verificar isso sozinho. Suponha loteria tenha 10 milhões de combinações de números e apenas um ganhador. Os bi custam US$ 1 e o prêmio é de US$ 6 milhões.

A pessoa que compra todos os bilhetes gasta US$ 10 milhões e ganha US$ 6 milh prêmio. Em outras palavras, como diz Smith, essa estratégia é perda na certa, algo n dos US$ 4 milhões. O pé de chinelo que compra um bilhete só se dá melhor – pelo n tem uma chance em 10 milhões de ganhar a bolada!

E se você compra dois bilhetes? Então sua chance de perder encolhe, embora seja 9.999.999 em 10 milhões para 9.999.998 em 10 milhões. Continue comprando bilhet sua chance de perder continua baixando, até o ponto de comprar 6 milhões de bil Nesse caso, sua chance de ganhar a bolada e, portanto, de ficar em casa, são sólidos 6 há apenas 40% de chance de sair perdedor. Contrariamente à alegação de Smith, tornou-se menos propenso a perder dinheiro comprando mais bilhetes.

Adquira mais um bilhete, porém, e você *seguramente* perderá dinheiro (se US$ 1 $ 4.000.001, isso depende de estar ou não com o bilhete vencedor.)

É difícil reconstituir aqui o raciocínio de Smith, mas ele pode ter sido vítima da f de "todas as curvas são retas", raciocinando que, se comprar todos os bilhetes faz você p dinheiro, então comprar mais bilhetes deve aumentar sua probabilidade de perder din

Comprar 6 milhões de bilhetes minimiza a chance de perder dinheiro, mas iss significa que seja a jogada certa, depende de *quanto* dinheiro você perde. O jogad bilhete único sofre da quase certeza de perder dinheiro, mas sabe que não vai perder n O comprador de 6 milhões de bilhetes, apesar da chance menor de perder, está em p muito mais perigosa. Provavelmente você ainda sente que nenhuma das opções p muito sábia. Como ressalta Smith, se a loteria é uma proposição ganhadora para o E parece que deve ser má ideia para quem quer que assuma o outro lado da aposta.

O que o argumento de Smith contra loterias não percebe é a noção de *valor esper* formalismo matemático que captura a intuição que Smith está tentando expressar. A funciona assim. Suponha que você possua um item cujo valor monetário é incerto – dig como um bilhete de loteria:

$\frac{9.999.999}{10.000.000}$ de vezes: o bilhete não vale nada.

$\frac{1}{10.000.000}$ de vezes: o bilhete vale US$ 6 milhões.

Apesar da nossa incerteza, ainda poderíamos desejar atribuir ao bilhete um valor def Por quê? Bem, e se aparece um sujeito oferecendo-se para pagar US$ 1,20 pelo bilhe pessoas? É sensato fazer o negócio e embolsar US$ 0,20 de lucro, ou devo me apegar a

Eis como você calcula o valor esperado de um bilhete de loteria. Para cada resu possível, você multiplica a chance desse resultado pelo valor do bilhete, dado esse resu Nesse caso simplificado, há somente dois resultados: você perde ou você ganha. Então c

$$\frac{9.999.999}{10.000.000} \times \text{US\$ } 0 = \text{US\$ } 0$$

$$\frac{1}{10.000.000} \times \text{US\$ 6 milhões} = \text{US\$ } 0{,}60$$

Aí você deve somar:

US$ 0 + US$ 0,60 = US$ 0,60.

Então, o valor esperado do seu bilhete é de US$ 0,60. Se um lotófilo bate na sua p oferece US$ 1,20 pelo seu bilhete, o valor esperado diz que você deve fazer o negóci verdade, o valor esperado diz que, em primeiro lugar, você não devia ter dado nada bilhete!

## O valor esperado não é o valor que você espera

Valor esperado, como significância, é outra daquelas noções matemáticas marcada pc nome que não capta exatamente seu sentido. Com certeza não "esperamos" que o bilh loteria valha US$ 0,60. Ao contrário, ele vale US$ 10 milhões ou US$ 0, sem nada no r

De maneira semelhante, suponha que eu faça uma aposta de US$ 10 num cachorr eu acho ter 10% de chance de ganhar uma corrida. Se o cachorro ganha, recebo US$ 1 o cachorro perde, não recebo nada. O valor esperado da aposta então é

(10% × US$ 100) + (90% × US$ 0) = US$ 10.

Mas não é isso, obviamente, que eu espero que aconteça. Ganhar US$ 10, na ver não é um resultado possível para minha aposta, muito menos o resultado esperadc nome melhor poderia ser "valor médio" – pois o que o valor esperado da aposta realr mede é o que eu esperaria acontecer se fizesse *muitas* dessas apostas em *muitos* c cachorros. Digamos que eu tenha feito mil apostas de US$ 10 como essa. Provavelmer teria ganhado cerca de cem delas (mais uma vez a lei dos grandes números!) e recebic $ 100 a cada vez, totalizando US$ 10 mil. Assim, minhas mil apostas estão dando de ret em média, US$ 10 por aposta. A longo prazo, a probabilidade é você sair empatado.

O valor esperado é uma ótima maneira de descobrir o preço correto de um objeto, a aposta num cachorro, de cujo valor não se tem certeza. Se eu dou US$ 12 em troca de um desses bilhetes, provavelmente acabarei perdendo dinheiro a longo prazo; por lado, se consigo obtê-los por US$ 8, provavelmente deveria comprar o máximo pos

Dificilmente hoje alguém ainda aposta em cachorros, mas o mecanismo do valor esp é o mesmo se você estiver determinando o preço de pules de corridas, opções no me de ações, bilhetes de loteria ou seguro de vida.

## O decreto do milhão[4]

A noção de valor esperado começou a entrar no foco matemático em meados dos anos e no final desse século a ideia já era suficientemente bem compreendida para ser usac cientistas práticos como Edmond Halley, o Astrônomo Real Britânico.[b] É isso aí, o ca cometa! Mas ele foi também um dos primeiros cientistas a estudar o cálculo corre preços de seguros, o que, no reinado de Guilherme III, era uma questão de ma importância militar. A Inglaterra havia se lançado entusiasticamente numa guerra nc tinente, e a guerra exigia capital. O Parlamento se propôs a levantar os fundos neces via "decreto do milhão", de 1692, que visava a arrecadar £ 1 milhão vendendo anui vitalícias para a população. Assinar uma anuidade significava pagar à Coroa uma po soma, em troca da garantia de receber um pagamento anual vitalício. Esse é um ti seguro de vida ao contrário. Os compradores essencialmente apostam que não vão m em futuro breve. Como medida do estado rudimentar da ciência atuarial na época, o da anuidade era fixado sem referência à idade do beneficiário![c] A anuidade vitalícia d com probabilidade de exigir recursos no máximo por uma década, era a mesma coi neto.

Halley era cientista o bastante para compreender o absurdo do esquema de p independente da idade. Determinou-se a elaborar uma contabilidade mais racional do da anuidade vitalícia. A dificuldade é que as pessoas não chegam e vão embora num hc rígido, como os cometas. No entanto, usando estatísticas de nascimentos e mortes, H conseguiu estimar a *probabilidade* de vários intervalos de vida para cada beneficiário, e modo computar o valor esperado da anuidade: "É ponto pacífico que o comprador pagar apenas pela parte do valor da anuidade correspondente às suas chances de estar isso deve ser computado anualmente, e a soma de todos esses valores anuais equival valor da anuidade para a vida da pessoa proposta."

Em outras palavras: o vovô, com sua expectativa de vida mais reduzida, paga meno anuidade que o netinho.

## "Isso é óoobvio"

Digressão: quando conto às pessoas a história de Edmond Halley e o preço das anuic frequentemente sou interrompido: "Mas é *óoobvio* que você deve cobrar mais daquel são mais jovens!"

Não é óbvio. Aliás, é óbvio se você já sabe, como nós, agora. Mas o fato de as pesso administravam as anuidades terem falhado em fazer tais observações, vezes e vezes repe

óbvias – quantidades negativas podem ser somadas e subtraídas, pode-se representar tajosamente pontos num plano por pares de números, probabilidades de certos ev podem ser matematicamente descritas e manipuladas –, porém, na realidade, nã absolutamente óbvias. Se fossem, não teriam chegado tão longe na história do pensar humano.

Isso lembra uma velha história do Departamento de Matemática de Harvard, envolv um dos grandes velhos professores russos, que chamaremos aqui de O. O professor O no meio de uma intrincada derivação algébrica quando um aluno no fundo da sala le a mão.

"Professor O, não acompanhei o último passo. Por que essas duas operações comut

O professor ergue as sobrancelhas e diz: "Isso é óoobvio."

Mas o aluno persiste: "Desculpe, professor, realmente não consigo ver."

Então o professor O volta ao quadro e acrescenta algumas linhas explicativas. "O devemos fazer? Bem, os dois operadores são ambos diagonalizados por… Bem, não e mente diagonalizados, mas… só um momento…" O professor O faz uma pequena p espiando o que está no quadro, e coça o queixo. Então se retira para sua sala. Cerca d minutos se passam. Os alunos estão prestes a ir embora quando o professor O v reassume seu lugar diante do quadro-negro.

"Sim", ele diz, satisfeito. "Isso é óoobvio."

## Não jogue na loteria

A loteria nacional Powerball[d] é atualmente jogada em 42 estados americanos, no distr Columbia e nas Ilhas Virgens. É extremamente popular, às vezes vendendo até 100 mi de bilhetes num único sorteio.[5] Gente pobre joga Powerball e gente que já é rica Powerball. Meu pai, ex-presidente da Associação Americana de Estatística, joga Powe e como ele geralmente paga um bilhete para mim, acho que também já joguei.

Isso é sensato?

Em 6 de dezembro de 2013, enquanto escrevo isto, o grande prêmio está na ca convidativos US$ 100 milhões. E o grande prêmio não é o único modo de vencer. C muitas loterias, a Powerball apresenta vários níveis de prêmios. Os prêmios menores, frequentes, ajudam a manter as pessoas com a sensação de que vale a pena jogar.

Com o valor esperado, podemos checar esses sentimentos com alguns fatos matemá Eis como se calcula o valor esperado para um bilhete de US$ 2. Quando você com bilhete, está comprando:

1/175 milhões de chance de um grande prêmio de US$ 100 milhões
1/5 milhões de chance de um prêmio de US$ 1 milhão
1/650 mil de chance de um prêmio de US$ 10.000
1/19 mil de chance de um prêmio de US$ 100

$\frac{1}{700}$ de chance de um prêmio de US$ 7
$\frac{1}{360}$ de chance de um prêmio diferente de US$ 7
$\frac{1}{110}$ de chance de um prêmio de US$ 4
$\frac{1}{55}$ de chance de um prêmio diferente de US$ 4

(Você pode obter todos esses detalhes no website da Powerball, que também oferec página surpreendentemente corajosa de "Perguntas mais frequentes" cheia de mater tipo: "P. Os bilhetes da Powerball expiram? R. Sim. O Universo está decaindo e nada para sempre.")

Assim, a quantia esperada para você é:

$$\frac{100\text{ milhões}}{175\text{ milhões}} + \frac{1\text{ milhão}}{5\text{ milhões}} + \frac{10\text{ mil}}{650\text{ mil}} + \frac{100}{19\text{ mil}} + \frac{100}{12\text{ mil}} + \frac{7}{700} + \frac{7}{360} + \frac{4}{110} + \frac{4}{55}$$

O que vem dar um pouquinho menos que US$ 0,94. Em outras palavras: segundo o esperado, o bilhete não vale seus US$ 2.

E esse não é o fim da história, porque nem todos os bilhetes de loteria são iguais. Qu a bolada é de US$ 100 milhões, como hoje, o valor esperado de um bilhete é escand mente baixo. Mas toda vez que o grande prêmio não sai para ninguém, mais dinheiro na composição do prêmio. Quanto maior o prêmio, mais gente compra bilhetes, e q mais as pessoas compram bilhetes, mais provável é que um desses bilhetes irá tornar al multimilionário. Em agosto de 2012, Donald Lawson, trabalhador ferroviário do Mich levou para casa um prêmio de US$ 337 milhões.

Quando a bolada é desse tamanho, o valor esperado de um bilhete também aumen cálculo é o mesmo que o anterior, só que substituindo os US$ 337 milhões no g prêmio:

$$\frac{337\text{ milhões}}{175\text{ milhões}} + \frac{1\text{ milhão}}{5\text{ milhões}} + \frac{10\text{ mil}}{650\text{ mil}} + \frac{100}{19\text{ mil}} + \frac{100}{12\text{ mil}} + \frac{7}{700} + \frac{7}{360} + \frac{4}{110} + \frac{4}{55}$$

que é US$ 2,29. De repente, jogar na loteria não parece uma aposta tão ruim. Qual de o tamanho da bolada para que o valor esperado de um bilhete exceda os US$ 2 que Agora você pode finalmente voltar para a sua professora de matemática da 8ª série e d ela que descobriu para que serve a álgebra. Se chamarmos o valor do grande prêmio o valor esperado de um bilhete é

$$\frac{G}{175\text{ milhões}} + \frac{1\text{ milhão}}{5\text{ milhões}} + \frac{10\text{ mil}}{650\text{ mil}} + \frac{100}{19\text{ mil}} + \frac{100}{12\text{ mil}} + \frac{7}{700} + \frac{7}{360} + \frac{4}{110} + \frac{4}{55}$$

ou, simplificando um pouco,

$$\frac{G}{175\text{ milhões}} + \text{US\$ } 0{,}37 \text{ (arredondando US\$ } 0{,}367\text{).}$$

ambos os lados por 175 milhões, você descobre que o valor do limiar do prêmio é p
mais de US$ 285 milhões. Isso não é algo que ocorra só uma vez na vida. O prêmio ch
a isso três vezes em 2012.[6] Então, parece que, no fim das contas, a loteria pode ser um
ideia, se você tiver o cuidado de jogar só quando o prêmio for alto o suficiente.

Mas tampouco esse é o fim da história. Você não é a única pessoa que sabe álg
Mesmo gente que não sabe álgebra instintivamente compreende que um bilhete de lot
mais atraente quando a bolada é de US$ 300 milhões do que quando é de US$ 80 milh
como sempre, a abordagem matemática é uma versão formalizada das nossas estim
mentais naturais, uma extensão do senso comum por outros meios. Um sorteio típi
US$ 80 milhões pode vender cerca de 13 milhões de bilhetes. Mas quando Donald La
ganhou US$ 337 milhões, ele estava mais ou menos contra 75 milhões de outros apostad

Quanto mais gente joga, mais pessoas ganham prêmios. Mas há somente um g
prêmio. Se duas pessoas acertam os seis números, elas precisam dividir a dinheirama.

Qual a probabilidade de você ganhar a bolada e não precisar dividi-la? Duas c
precisam acontecer. Primeiro, você precisa acertar todos os seus números. Você tem
chance de acertar em 175 milhões. Mas isso não basta para vencer. *Todos os outros joga
devem perder*.

A chance de qualquer jogador específico perder o grande prêmio é bem gr
simplesmente algo como 174.999.999 em 175 milhões. Mas quando 75 milhões de o
apostadores estão no jogo, começa a haver uma chance substancial de que um desses
acerte a bolada.

Quanto é esse "substancial"? Usamos um fato que já encontramos diversas veze
queremos saber a probabilidade de que aquela coisa Nº 1 aconteça, e sabemos que a
coisa Nº 2 acontece, e se as duas coisas são independentes – a ocorrência de uma não
efeito sobre a probabilidade da outra –, então a probabilidade de acontecerem a coisa
*e* a coisa Nº 2 é o produto das duas probabilidades.

Abstrato demais? Vamos fazer com a loteria.

Há uma chance de $^{174.999.999}/_{175.000.000}$ de eu perder, e uma chance de $^{174.999.999}/_{175.000.000}$
meu pai perca. Então a probabilidade de *nós dois* perdermos é

$$\frac{174.999.999}{175.000.000} \times \frac{174.999.999}{175.000.000}$$

ou 99,9999994%. Em outras palavras, como digo a meu pai toda vez, é melhor a gent
largar nossos empregos.

Mas qual a chance de que *todos os 75 milhões* dos seus competidores percam? Tud
tenho a fazer é multiplicar $^{174.999.999}/_{175.000.000}$ por si mesmo 75 milhões de vezes. Essa p
uma tarefa impeditiva, incrivelmente brutal. Mas você pode simplificar muito o prob
apresentando-o como exponencial, o que seu computador pode calcular instantanear
para você:

$$\left(\frac{174.999.999}{175.000.000}\right)^{75\ \text{milhões}} = 0{,}651$$

Então há uma chance de 65% de que nenhum dos seus colegas apostadores ganhe, significa que há uma chance de 35% de que pelo menos um ganhe. Se isso acontece parte no prêmio de US$ 337 milhões cai para meros US$ 168 milhões. Isso corta o esperado do grande prêmio para

$$65\% \times 337 \text{ milhões} + 35\% \times 168 \text{ milhões} = \text{US\\$ } 278 \text{ milhões},$$

um pouquinho abaixo do valor limiar de US$ 285 milhões que faz o grande prêmio v pena. E isso não leva em conta a possibilidade de que *mais* de duas pessoas ganhem o g prêmio, dividindo ainda mais o dinheiro. A possibilidade de divisão do grande pı significa que o bilhete de loteria tem um valor esperado menor do que lhe custou, m quando o grande prêmio chega a US$ 300 milhões. Se o prêmio fosse ainda maior, o esperado poderia encostar na zona que “vale a pena” – ou não, se atraísse um nível mais alto de vendas de bilhetes.[f] O maior prêmio da Powerball até hoje, US$ 588 mil foi ganho por dois apostadores, e o maior prêmio de loteria na história dos Estados Uı US$ 688 milhões da Mega Millions Prize, foi dividido em três.

E nem sequer consideramos os impostos que você paga sobre seus ganhos, ou o fa o prêmio ser distribuído para você em parcelas anuais – se quiser todo o dinheiro de o pagamento é substancialmente menor. E lembre-se, a loteria é uma criação do Estad Estado sabe muita coisa a seu respeito. Em muitos países, impostos na fonte e c obrigações financeiras excepcionais são pagos pelos ganhos de loteria antes que voc um centavo. Uma conhecida minha que trabalha numa loteria estadual me contou a hi de um homem que foi até o escritório com a namorada para embolsar seu prêmio de 10 mil e passar um fim de semana de farra na cidade. Quando apresentou seu bilh funcionário encarregado disse ao casal que quase todo o prêmio, exceto algumas cer de dólares, já estava comprometido com o sustento do filho delinquente, que o homem à ex-namorada.

Era a primeira vez que a namorada atual do sujeito ouvia falar do filho dele. O f semana não correu de acordo com o planejado.

ENTÃO, qual a melhor estratégia para ganhar dinheiro jogando na loteria? Eis o plano d pontos certificado matematicamente.

1. Não jogue na loteria.
2. Se você jogar na loteria, não jogue a não ser que o grande prêmio seja realı grande.
3. Se você comprar bilhetes para um prêmio maciço, tente reduzir as chances de d seu ganho; escolha números que outros jogadores não escolheriam.[7] Não esco seu aniversário. Não escolha números que ganharam num sorteio anterior. escolha números que formem um padrão bonito no bilhete. E, pelo amor de não escolha números que você encontra no biscoitinho da sorte. (Você sabe qu não põem números diferentes em todo embrulho, não sabe?)

A Powerball não é a única loteria, mas todas elas têm uma coisa em comum: são péssimas apostas. Uma loteria, como observou Adam Smith, destina-se a produzir o retorno de certa proporção das vendas de bilhetes para o Estado. Para que isso funcio Estado tem de ganhar mais dinheiro em bilhetes que dar em prêmios. Tendo isso em mente, os apostadores das loterias em média gastam mais dinheiro do que ganham. E o valor esperado de um bilhete de loteria *deve* ser negativo.

Exceto quando não é.

## O cambalacho da loteria que não aconteceu

Em 12 de julho de 2005, a Unidade Corregedora da Loteria Estadual de Massach recebeu um telefonema incomum de um empregado do Star Market, em Camb subúrbio do norte de Boston que abriga tanto a Universidade Harvard quanto o MI estudante da faculdade fora ao supermercado para comprar bilhetes de um novo jo loteria do estado, o Cash WinFall. Até aí, nada de estranho. O inusitado foi o tamanh compra. O aluno entregou 14 mil volantes, cada um preenchido a mão, num total d 28 mil em bilhetes de loteria.

Sem problema, a loteria disse à loja. Se os volantes estão preenchidos corretamente um pode jogar quanto quiser. Pedia-se às lojas que obtivessem autorização do escr central da loteria se quisessem vender mais de US$ 5 mil em bilhetes por dia, autorização era facilmente concedida.

Isso era uma coisa boa, porque o Star não era o único agente de loteria na área de B a fazer negócios vigorosos naquela semana. Mais doze lojas contataram a loteria ant sorteio de 14 de julho para pedir autorizações. Três delas concentravam-se num bai população pesadamente asiático-americana, em Quincy, ao sul de Boston, às marge baía. Dezenas de milhares de bilhetes do Cash WinFall estavam sendo vendidos a peq grupos de compradores num punhado de lojas.

O que acontecia? A resposta não era segredo, estava bem à vista, ali nas regras do WinFall. O novo jogo, lançado no outono de 2004, vinha substituir o Mass Million fora abolido depois de passar um ano inteiro sem pagar o grande prêmio. Os joga estavam ficando desanimados, e as vendas, em baixa. Massachusetts precisava dar sacudida na sua loteria, e os funcionários estaduais tiveram a ideia de adaptar WinFa jogo de Michigan. No Cash WinFall, a bolada não se acumulava a cada semana qu houvesse ganhador. Em vez disso, toda vez que a soma ultrapassasse US$ 2 milh dinheiro "rolava para baixo", aumentando os prêmios menores, menos difíceis de gan a bolada voltava para seu mínimo de US$ 500 mil no sorteio seguinte. A comissão de lo esperava que o novo jogo, que possibilitava ganhar boas quantias sem acertar o g prêmio, fosse um bom negócio.

Fizeram um trabalho muito bem-feito. No Cash WinFall, o estado de Massach inadvertidamente concebera um jogo que na realidade *era* um bom negócio. No ver

Num dia normal, eis como era a distribuição de prêmios do Cash WinFall:

| | | |
|---|---|---|
| acertar todos os seis números | 1 em 9,3 milhões | grande prêmio variável |
| acertar cinco em seis | 1 em 39 mil | US$ 4 mil |
| acertar quatro em seis | 1 em 800 | US$ 150 |
| acertar três em seis | 1 em 47 | US$ 5 |
| acertar dois em seis | 1 em 6,8 | um bilhete de loteria grátis |

Se a bolada é de US$ 1 milhão, o valor esperado de um bilhete de US$ 2 é bastante

$$\left(\frac{\text{US\$ 1 milhão}}{\text{9,3 milhões}}\right)+\left(\frac{\text{US\$ 4 mil}}{\text{39 mil}}\right)+\left(\frac{\text{US\$ 150}}{800}\right)+\left(\frac{\text{US\$ 5}}{47}\right)+\left(\frac{\text{US\$ 2}}{6{,}8}\right)=\text{US\$ 0,798.}$$

Essa é uma taxa de retorno tão patética que faz os apostadores da Powerball parec investidores astutos. (E nós avaliamos um bilhete grátis generosamente nos US$ custaria em vez do valor esperado, substancialmente menor, que ele traz.)

No entanto, num dia em que o dinheiro "rola para baixo", as coisas parecem difer Em 7 de fevereiro de 2005, a bolada estava perto de US$ 3 milhões. Ninguém ganhou, não foi surpresa, considerando que apenas cerca de 470 mil pessoas jogaram Cash W naquele dia, e acertar todos os seis números era uma chance em 10 milhões.

Então todo o dinheiro rolou para baixo. A fórmula oficial rolava US$ 600 mil pa prêmios de cinco e três acertos, US$ 1,4 milhão para os prêmios de quatro acert probabilidade de acertar quatro números em seis no WinFall é de mais ou menos um oitocentas, assim, deve ter havido cerca de seiscentos acertadores de quatro números na dia, de um total de 470 mil. Isso é um monte de ganhadores, mas US$ 1,4 milhão monte de dinheiro. Dividindo em seiscentas partes, restam mais de US$ 2 mil para ganhador. Na verdade, esperava-se que o prêmio para quem acertasse quatro númer seis naquele dia fosse em torno de US$ 2.385. A proposta é muito mais atraente q magros US$ 150 ganhos num dia normal. Uma chance em oitocentas para um retor US$ 2.385 tem um valor esperado de

$$\frac{\text{US\$ 2.364}}{800}=\text{US\$ 2,98.}$$

Em outras palavras, o prêmio para quatro números certos, *sozinho*, faz o bilhete val preço de US$ 2. Inclua os outros prêmios, e a história fica ainda melhor.

| Prêmio | Chance de ganhar | Número esperado de ganhadores | Valor "rolado" | Valor "rolado" por prêmio |
|---|---|---|---|---|
| Acertar 5 em 6 | 1 em 39 mil | 12 | US$ 600 mil | US$ 50 mil |
| Acertar 4 em 6 | 1 em 800 | 587 | US$ 1,4 milhão | US$ 2.385 |
| Acertar 3 em 6 | 1 em 47 | 10 mil | US$ 600 mil | US$ 60 |

$$\frac{\text{US\$ 50 mil}}{\text{39 mil}} + \frac{\text{US\$ 2.385}}{800} + \frac{\text{US\$ 60}}{47} = \text{US\$ 5,53}.$$

Um investimento em que você faz três paus e meio de lucro numa aplicação de U
não é algo a se desprezar.[g]

Claro que, se um sortudo acerta o grande prêmio, o jogo fica atraente para o rest
pessoas. Mas o Cash WinFall nunca foi popular o bastante para tornar provável
resultado. Em 45 dias de dinheiro "rolado" durante o tempo de vida do jogo, apenas
vez um apostador acertou os seis números e impediu o "rolamento para baixo".[h]

Sejamos claros – esse cálculo não significa que uma aposta de US$ 2 seguramen
fará ganhar dinheiro. Ao contrário, quando você compra um bilhete do Cash Winfall
dia de "rolagem", seu bilhete tem mais probabilidade de sair perdedor, da mesma form
em qualquer outro dia. O valor esperado não é o valor que você espera! No entanto,
dia de "rolagem", os prêmios, no improvável evento de você ganhar, são maiores –
maiores. A mágica do valor esperado é que o pagamento *médio* de cem, mil ou 1
bilhetes provavelmente é muito próximo de US$ 5,53. Qualquer bilhete considerado p
velmente não tem valor, mas se você possui mil deles, é certo que vai recuperar seu din
e até ganhar um pouco mais.

Quem compra mil bilhetes de loteria de uma só vez?

Garotos do MIT, eis quem compra.

A razão de eu contar os prêmios do WinFall de 7 de fevereiro de 2005 até o último
é que esse número está registrado no exaustivo e, francamente, meio emocionante rela
caso WinFall[8] submetido à avaliação do estado em julho de 2012 por Gregory W. Sul
inspetor-geral da Fazenda de Massachusetts. Acho que posso dizer com segurança qu
é o único documento de supervisão fiscal do estado que inspira o leitor a se pergu
alguém tem os direitos disso para o cinema?

A razão é que *neste dia específico* para o qual os dados estão registrados é que:
fevereiro foi o primeiro dia de "rolagem" depois que James Harvey, estudante do últim
do MIT, que trabalhava num projeto de estudo independente, comparando os mérito
vários jogos lotéricos estaduais, percebeu que Massachusetts havia criado acidentalı
um veículo de investimento bestialmente lucrativo para qualquer um que conhecess
pouco de cálculo o bastante para perceber isso. Harvey juntou um grupo de amigo
MIT, não é difícil arranjar um grupo de amigos que saibam todos calcular um valor espe
e comprou mil bilhetes. Como seria de esperar, um desses chutes em 800 acabou saiı
o grupo de Harvey levou para casa um daqueles prêmios de US$ 2 mil. Eles tar
ganharam um punhado de acertos de três números. Ao todo, mais ou menos triplicaı
investimento inicial.

Você não ficará surpreso de saber que Harvey e seus coinvestidores não pararam de
Cash WinFall. Ou que ele nunca chegou perto de concluir o estudo independente -
menos não para os créditos do curso. Na verdade, seu projeto de pesquisa logo evoluiı
um próspero negócio. No verão, os confederados de Harvey estavam comprando de
de milhares de bilhetes de cada vez – foi um membro do seu grupo que fez a mastodó

embora sua abordagem fosse qualquer coisa, menos aleatória. O nome referia-se a Ra
Hall, o alojamento do MIT onde Harvey tinha bolado seu plano para ganhar dinhei
WinFall.

Os estudantes do MIT não estavam sozinhos. Pelo menos duas outras agremiaçõ apostas se formaram para tirar vantagem da herança inesperada do WinFall.[i] Ying Z médico pesquisador em Boston, com doutorado na Northeastern University, forn Doctor Zhang Lottery Club (DZLC). Foi o DZLC que contribuiu para o pico de vend Quincy. Não demorou muito e o grupo estava comprando US$ 300 mil em bilhetes cada "rolagem". Em 2006, o doutor Zhang de verdade abandonou a medicina para de se em tempo integral a jogar Cash WinFall.

Ainda outro grupo de apostas era liderado por Gerald Selbee, aposentado na cas setenta anos com bacharelado em matemática. Selbee morava em Michigan, lar origir WinFall. Seu grupo de 32 apostadores, composto sobretudo por parentes seus, jogou W por cerca de dois anos até que o jogo fechou, em 2005. Quando Selbee descobriu que o da alegria estava de volta aos trilhos mais a leste, sua rota foi clara. Em agosto de 2005 a esposa, Marjorie, foram de carro até Deerfield, na parte ocidental de Massachus fizeram a primeira aposta – 60 mil bilhetes. Levaram para casa pouco mais de US$ 5 de puro lucro.

Com a vantagem de sua experiência de jogo em Michigan, Selbee adicionou a seus g com os bilhetes uma empreitada de lucro extra.[10] As lotéricas em Massachusetts rece uma comissão de 5% nas vendas de bilhetes. Selbee fez acordos diretamente com um oferecendo centenas de milhares de dólares em negócios de uma vez só em troca de d meio a meio a comissão de 5%. Só essa jogada gerava milhares de dólares em l adicionais para a equipe de Selbee a cada dia de "rolagem".

Você não precisa de um diploma do MIT para ver como o influxo de jogadores d volume afetava o jogo. Lembre-se: a razão para os pagamentos "rolados" serem tão in era que muito dinheiro era dividido entre alguns poucos ganhadores. Em 2007, 1 milh mais de bilhetes eram vendidos a cada sorteio "rolado", a maioria para as três associaçõ alto volume. Os dias de prêmio de US$ 2.300 para acertar quatro de seis números há haviam acabado. Se 1 milhão e meio de pessoas compra bilhetes, e uma pessoa em oito acerta quatro números, então é típico haver quase 2 mil ganhadores de quatro númer modo que cada parcela de US$ 1,4 milhão agora estava mais perto de US$ 800.

É bastante fácil descobrir quanto um grande jogador podia ganhar no Cash WinF artifício é olhar do ponto de vista da própria loteria. Se é dia de "rolagem", o estad (pelo menos!) US$ 2 milhões acumulados do dinheiro do grande prêmio do qual prec livrar. Digamos que 1 milhão e meio de pessoas compra bilhetes para a "rolagem". São 3 milhões de receita, dos quais 40%, ou US$ 1,2 milhão, vão para os cofres do esta Massachusetts e outro US$ 1,8 milhão é lançado no fundo do grande prêmio, send tudo deve ser desembolsado para os apostadores antes do fim do dia. Aí o estado peg 3 milhões nesse dia e entrega US$ 3,8 milhões:[j] US$ 2 milhões do dinheiro da ver grande prêmio e US$ 1,8 milhão das receitas de bilhetes do dia. Em qualquer dia, o que que o estado ganhe, os jogadores, em média, perdem, e vice-versa. Então esse é um bo

Se os apostadores compram 3,5 milhões de bilhetes, a história é outra. Agora a l leva US$ 2,8 milhões como sua parte e paga os US$ 4,2 milhões restantes. Juntando c US$ 2 milhões já em caixa, isso perfaz US$ 6,2 milhões, menos que os US$ 7 milh receita que o estado pegou. Em outras palavras, apesar da generosidade da "rolag loteria ficou tão popular que o estado ainda acaba ganhando dinheiro à custa dos joga

Isso deixa o estado muito, muito feliz.

O ponto de equilíbrio vem quando a fatia de 40% da receita do dia da "rolagem" se i exatamente aos US$ 2 milhões já em caixa (isto é, o dinheiro com que contribuír apostadores não sofisticados ou muito amantes do risco para jogar WinFall sem a "rolag Isso equivale a US$ 5 milhões, ou 2,5 milhões de bilhetes. Mais vendas que isso, e Win uma aposta ruim. Menos que isso – no tempo de vida do WinFall, sempre *foi* menos WinFall oferece aos apostadores um meio de ganhar dinheiro.

O que estamos realmente usando aqui é um fato maravilhoso, e ao mesmo tempo do senso comum, chamado *aditividade do valor esperado*. Suponha que eu tenha franquia do McDonald's e um café, e o McDonald's tenha um lucro anual esperado d 100 mil, enquanto o lucro líquido esperado do café é de US$ 50 mil. O dinheiro pode e descer de ano a ano, claro; o valor esperado significa que, a longo prazo, a quantia r de dinheiro que o McDonald's rende será em torno de US$ 100 mil por ano e a q média do café, US$ 50 mil.

A aditividade diz que, em média, minha retirada total de Big Macs e *mochaccinos* ac por se assentar na média de US$ 150 mil, soma dos lucros esperados de cada um dos dois negócios.

Em outras palavras:

ADITIVIDADE. *O valor esperado da soma de duas coisas é a soma do valor esperado d primeira coisa com o valor esperado da segunda coisa.*

Os matemáticos gostam de sintetizar esse raciocínio numa fórmula, exatamente sintetizamos a comutatividade da adição ("estas *x* fileiras de *y* furos é a mesma coisa colunas de *x* furos") pela fórmula $a \times b = b \times a$. Nesse caso, se X e Y são dois números cujos valores não estamos certos, e E(X) é a abreviação para "o valor esperado de X", a aditividade simplesmente diz

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Eis o que isso tem a ver com a loteria. O valor de todos os bilhetes num dado sorte quantia fornecida pelo estado. O valor não está sujeito a nenhuma incerteza,[k] é simples o dinheiro rolado, US$ 3,8 milhões, no primeiro exemplo dado. O valor esperado d 3,8 milhões é, bem, exatamente o que se espera, US$ 3,8 milhões.

Nesse exemplo, havia 1 milhão de jogadores num dia de rolagem. A aditividade n que a soma dos valores esperados de todo o 1,5 milhão de bilhetes de loteria é o esperado do valor total de todos os bilhetes, ou seja, US$ 3,8 milhões. Mas cada bilhete

você está somando 1,5 milhão de cópias do mesmo valor para obter US$ 3,8 milhões número deve ser US$ 2,53. O lucro esperado para seu bilhete de US$ 2 é de US$ 0,53, que 25% acima de sua aposta, um lucro convidativo sobre o que era para ser uma drc aposta.

O princípio da aditividade é tão atraente do ponto de vista intuitivo que fica fácil p que ele é óbvio. Mas, assim como o preço das anuidades de seguros de vida, ela não é ( Para ver isso, vamos substituir o valor esperado por outras noções e ver como tudo va o espaço. Considere:

*O valor mais provável da soma de um punhado de coisas é a soma dos valores prováveis de cada uma dessas coisas.*

Isso está totalmente errado. Suponha que eu escolha ao acaso para qual dos meu filhos vou legar a fortuna da família. O valor mais provável da parte de cada um é porque há duas chances em três que eu os deserde. Mas o valor mais provável da dessas três cotas – na verdade, seu *único* valor possível – é o valor de todo o meu patrin

## Agulha de Buffon, macarrão de Buffon, círculo de Buffon

Precisamos interromper por um minuto a história dos nerds da faculdade versus a lc porque, já que estamos falando de aditividade do valor esperado, não posso deixar d contar uma das mais belas provas que conheço nas quais essa mesma ideia se baseia.

Ela começa com o jogo de *franc-carreau*, que, como a loteria genovesa, nos lembr as pessoas, muito antigamente, eram capazes de apostar em qualquer coisa. Tudo ç precisa para o *franc-carreau* é uma moeda e um piso de azulejos quadrados. Joga-se moeda no chão e faz-se uma aposta: ela vai cair totalmente dentro do azulejo ou vai a tocando alguma das bordas? (*Franc-carreau* pode ser traduzido, aproximadamente, "quadrado dentro do quadrado";[11] a moeda usada para o jogo não era o franco, qu estava em circulação na época, e sim o *écu*.)

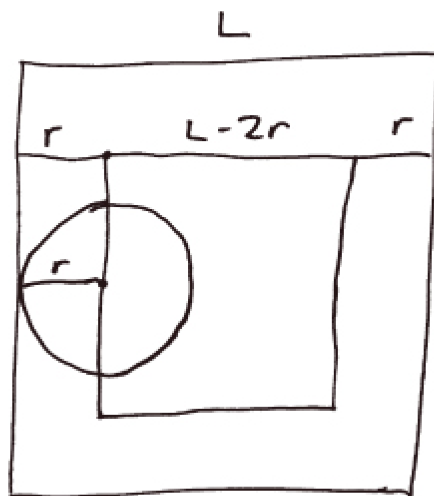
Georges-Louis LeClerc, conde de Buffon, era um aristocrata da província de Burgu que desde cedo desenvolveu ambições acadêmicas. Cursou a escola de direito, talvez ( objetivo de seguir os passos do pai na magistratura, mas logo que obteve o diploma a para o alto os assuntos jurídicos em favor da ciência. Em 1733, aos 27 anos, estava p para se candidatar à Real Academia de Ciências em Paris.

Buffon mais tarde ganharia fama como naturalista, escrevendo uma maciça *Hi natural* em 24 volumes, apresentando sua proposta para uma teoria explicativa da o da vida tão universal e sintética quanto a teoria de Newton em relação ao movimen força. Mas, quando jovem, influenciado por um breve encontro e uma longa troca de ( com o matemático suíço Gabriel Cramer,[1] os interesses de Buffon se voltavam p matemática pura, e foi como matemático que ele se candidatou à Real Academia.

O artigo acadêmico que Buffon apresentou era uma engenhosa justaposição de campos matemáticos sempre tidos como separados: geometria e probabilidade. O tem era uma grande questão sobre a mecânica dos planetas em suas órbitas nem a econom

indagava, de que a moeda caísse inteiramente dentro de um único azulejo? Qual dev o tamanho dos azulejos do piso para que o jogo fosse justo para ambos os jogadores?

Aqui está o que Buffon fez. Se a moeda tem raio *r* e o azulejo quadrado tem la comprimento L, então a moeda toca uma borda do quadrado maior exatamente quanc centro pousa em cima da borda de um quadrado menor, cujo lado mede L – 2*r*:




O quadrado menor tem área $(L - 2r)^2$, enquanto o quadrado maior tem área $L^2$; lo você está apostando que a moeda caia "francamente dentro do quadrado", sua chan ganhar é a fração $(L-2r)^2/L^2$. Para que o jogo seja justo, essa chance precisa ser ½, o que sig que

$$\frac{(L - 2r)^2}{L^2} = \frac{1}{2}$$

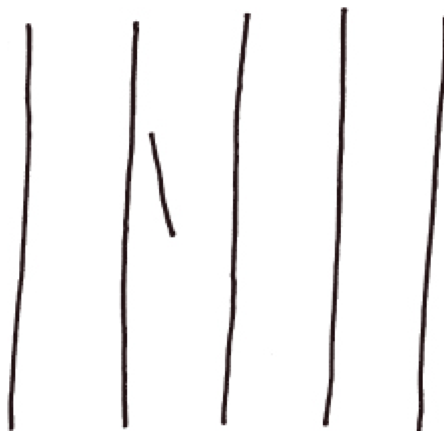
Buffon resolveu essa equação (e você também pode resolver, se estiver a fim) e desc que o *franc-carreau* era um jogo justo quando o lado do *carreau* era $4 + 2\sqrt{2}$ vezes o ra moeda, uma razão um pouquinho abaixo de sete. Isso era algo conceitualmente interes considerando que a combinação de raciocínio probabilístico com figuras geométrica novidade. Mas não era muito difícil, e Buffon sabia que não era suficiente para propicia entrada na Academia. Então, foi adiante: "Mas se, em vez de jogar no ar uma peça red como um *écu*, alguém jogasse uma peça de outro formato, como uma *pistole* espar quadrada, ou uma agulha, uma vareta etc., o problema passaria a exigir um pouco m geometria."[13]

Essa era uma afirmação subestimada. O problema da agulha é aquele pelo qual o de Buffon é lembrado nos círculos matemáticos até hoje. Deixe-me explicar o que B fez.

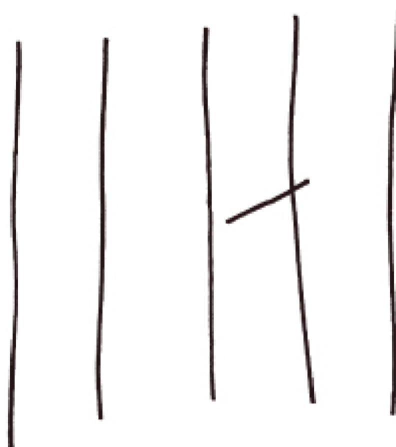
*O problema da agulha de Buffon*. Suponha que você tenha um piso de madeira fe ripas longas e finas, e que por acaso tenha na mão uma agulha cujo compriment exatamente da largura das ripas. Jogue a agulha no chão. Qual a chance de que a a cruze uma das frestas que separam as ripas?

Eis por que o problema é tão delicado. Quando você joga um *écu* no chão, não im em que direção cai a cara de Luís XV. Um círculo é o mesmo, de qualquer ângulo – a cl de cruzar uma fresta não depende da orientação da moeda.

Mas a agulha de Buffon é outra história. Uma agulha orientada quase paralelame ripas tem pouca probabilidade de cruzar uma fresta:



Mas se a agulha cai atravessada, é quase certo que ela cruze:



O *franc-carreau* é altamente simétrico – em termos técnicos, dizemos que é *invari* rotação. No problema da agulha, a simetria foi quebrada. Isso torna o problema muitc difícil: precisamos ficar de olho não só onde cai o centro da agulha, mas também na di em que ela aponta.

Nos dois casos extremos, a chance de a agulha cruzar uma fresta é zero (se a agulh paralela à fresta) ou um (se a agulha e a fresta forem perpendiculares). Então você pc dividir a diferença e chutar que a agulha cruza a fresta exatamente na metade das veze

Mas isso está errado. Na verdade, a agulha cruza uma fresta substancialmente mais do que cai totalmente no interior de uma ripa só. O problema da agulha de Buffon ter resposta lindamente inesperada: a probabilidade é $2/\pi$, ou cerca de 64%. Por que π, se n círculo à vista? Buffon achou a resposta usando um argumento um tanto intrin envolvendo a área sob a curva chamada cicloide. Determinar essa área requer um pouq de cálculo integral, nada que um aluno de 3º ano de matemática não possa fazer, ma

Mas há outra solução, descoberta por Joseph-Émile Barbier mais de um século dep entrada de Buffon para a Real Academia. Não é necessário nenhum cálculo form verdade, você não precisa fazer qualquer tipo de conta. O argumento, ainda que um p rebuscado, usa nada mais que aritmética e intuição geométrica básica. O ponto cru entre todas as coisas, a aditividade do valor esperado!

O primeiro passo é reformular o problema de Buffon em termos de valor espe Podemos perguntar: qual o *número* esperado de frestas que a agulha cruza? O númer Buffon almejava calcular era a probabilidade $p$ de que a agulha lançada cruzasse uma f Logo, há uma probabilidade $1 - p$ de que a agulha não cruze nenhuma fresta. Ma agulha cruza uma fresta, ela cruza *exatamente* uma.[n] Então, o número esperado de c mentos é obtido da mesma maneira que sempre calculamos o valor esperado: somando número possível de cruzamentos, multiplicado pela probabilidade de observar esse nú Nesse caso as únicas possibilidades são zero (observada com probabilidade $1 - p$) (observada com probabilidade $p$), logo, se somarmos

$$(1 - p) \times 0 = 0$$

e

$$p \times 1 = p$$

obtemos $p$. Logo, o número esperado de cruzamentos é simplesmente $p$, o mesmo nú computado por Buffon. Parece que não fizemos nenhum progresso. Como podemos d brir o misterioso número?

Quando você se defronta com um problema matemático e não sabe o que fazer, ex duas opções básicas: tornar o problema mais fácil ou mais difícil.

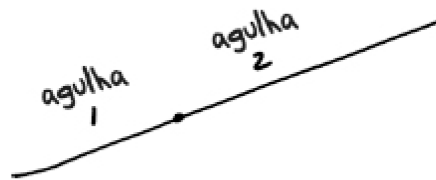
Torná-lo mais fácil soa melhor – você substitui o problema por outro mais sir resolve este e aí espera que a compreensão adquirida ao resolver o problema mais fác dê alguma percepção sobre o problema real. Isso é o que os matemáticos fazem toda ve modelam um sistema complexo do mundo real com um mecanismo matemático f cristalino. Às vezes essa abordagem dá muito certo; se você está traçando a trajetória c projétil pesado, pode se sair muito bem ignorando a resistência do ar e pensando no c em movimento como sujeito apenas à força constante da gravidade. Outras vezes, a si ficação é tão simples que elimina as características de interesse do problema, como na piada sobre o físico encarregado de otimizar a produção de leite: ele começa com g confiança: "Consideremos uma vaca esférica…"

Nesse espírito, pode-se tentar obter algumas ideias sobre a agulha de Buffon via so do problema mais fácil do *franc-carreau*: "Considere uma agulha circular…" Mas nã claro que informação útil pode se obter de uma moeda, cuja simetria rotacional ro própria característica que torna o problema da agulha interessante.

Em vez disso, voltamo-nos para a outra estratégia, aquela que Barbier usou: *tor problema mais difícil*. Isso não soa promissor. Mas, quando dá certo, funciona com

Vamos começar no pequeno. E se perguntarmos, mais genericamente, sobre o nú esperado de cruzamentos de frestas por uma agulha com comprimento equivalente a larguras de ripas? Essa parece uma questão mais complicada, porque agora há três resul possíveis em vez de dois. A agulha pode cair inteiramente dentro de uma ripa, pode c uma fresta ou pode cruzar duas. Então, para calcular o número esperado de cruzam parece que teríamos de computar as probabilidades de três eventos separados, e n apenas dois.

Graças à aditividade, contudo, o problema mais difícil é mais fácil que você p Desenhe um ponto no centro de uma agulha comprida e rotule as duas metades de "2", assim:




Agora, o número de cruzamentos esperados da agulha comprida é exatamente a do número esperado de cruzamentos da meia agulha 1 com o número esperado de c mentos da meia agulha 2. Em termos algébricos, se X é o número de frestas atraves pela meia agulha 1 e Y é o número de frestas atravessadas pela meia agulha 2, en número total de frestas da agulha comprida é X + Y. Mas cada uma dessas duas partes e agulha do comprimento original considerado por Buffon, então, cada uma dessas ag em média, cruza as frestas *p* vezes, isto é, E(X) e E(Y) são ambos iguais a *p*. Logo, o nú esperado de cruzamentos da agulha toda, E (X + Y), é simplesmente E(X) + E(Y), que *p*, que é 2*p*.

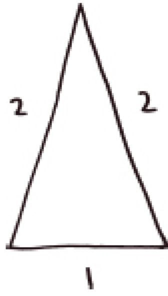
O mesmo raciocínio se aplica a uma agulha com comprimento três, quatro ou cem a largura da ripa. Se uma agulha tem comprimento N (onde agora tomamos a largu ripa como nossa unidade de medida), seu número esperado de cruzamentos é N*p*.

Isso funciona tanto para agulhas curtas quanto para compridas. Suponha que eu uma agulha cujo comprimento é ½ – ou seja, metade da largura da ripa. Como a agul comprimento um de Buffon pode ser dividida em duas agulhas de comprimento ½ valor esperado *p* deve ser o dobro do número esperado de cruzamentos da agul comprimento ½. Então, a agulha de comprimento ½ tem (½)*p* de cruzamentos espe Na verdade, a fórmula

Número esperado de cruzamentos de uma agulha de comprimento N = N*p*

vale para *qualquer* número real positivo N, grande ou pequeno.

(A essa altura, deixamos para trás a prova rigorosa – é necessário algum argur técnico para justificar por que a afirmação acima está em ordem quando N é al hedionda quantidade irracional, como raiz quadrada de 2. Mas juro que as ideias esse da prova de Barbier são aquelas que estou descrevendo.)




Essa agulha é a mais comprida até agora, com comprimento total de cinco. Ma dobrada em dois lugares, e eu juntei as pontas, de modo a formar um triângulo. Os segm retos têm comprimentos um, dois e dois, então, o número esperado de cruzamentos de segmento é respectivamente $p$, $2p$, $2p$. O número de cruzamentos de toda a agulha é a do número de cruzamentos de todos os segmentos. Então, a aditividade nos diz número esperado da agulha toda é

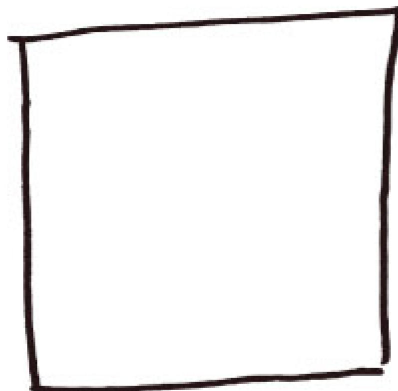
$$p + 2p + 2p = 5p.$$

Em outras palavras, a fórmula

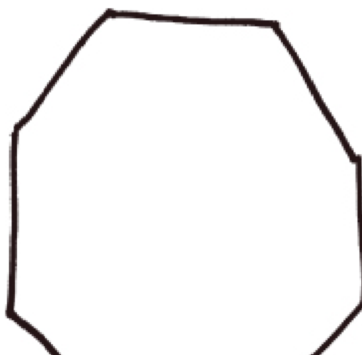
Número esperado de cruzamentos de uma agulha de comprimento N = N$p$

vale também para agulhas dobradas.

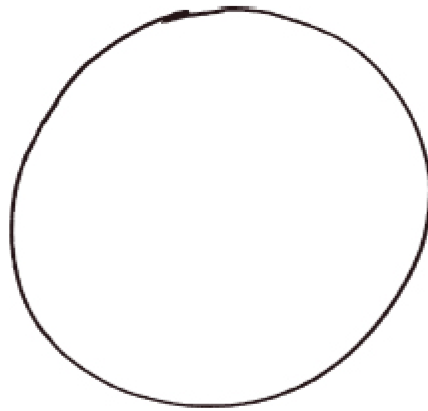
Eis uma agulha dessas:



E outra:



E mais outra:

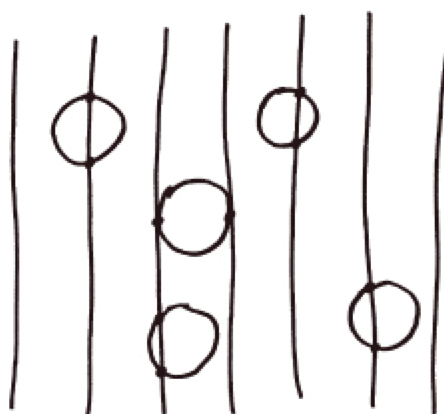


Nós vimos essas figuras antes. São as mesmas que Arquimedes e Eudoxo usaram milênios atrás, quando estavam desenvolvendo o método da exaustão. A última parece um círculo de diâmetro um, mas na verdade é um polígono composto de 6 minúsculas agulhas. Seu olho não consegue sacar a diferença, e o chão também não, significa que o número esperado de cruzamentos de um círculo de diâmetro um é exata o mesmo que o número esperado de cruzamentos do 65.536-ágono. Pela nossa reg agulha dobrada, isso é Np, onde N é o perímetro do polígono. E qual é o perímetro? ser quase exatamente o do círculo. O círculo tem raio ½, então sua circunferência é π. A o número esperado de vezes que o círculo cruza uma fresta é $\pi p$.

Como está funcionando para você tornar o problema mais difícil? Não parec estamos deixando o problema cada vez mais abstrato, cada vez mais genérico, sem s abordar seu tema fundamental: qual o valor de $p$?

Bem, adivinhe só, acabamos de calculá-lo.

Quantos cruzamentos tem o círculo? De repente, um problema que parecia difíc fácil. A simetria que perdemos quando passamos da moeda para a agulha foi agora r rada, dobrando-se a agulha na forma de um círculo. Isso simplifica tremendame assunto. Não importa onde caia o círculo, ele cruza as linhas do piso exatamente duas



Então, o número esperado de cruzamentos é dois, e também é $\pi p$. Assim, descob que $p = 2/\pi$, exatamente como disse Buffon. Na verdade, esse argumento aplica-se a qua agulha, por mais poligonal e curva que possa ser. O número esperado de cruzamentos

espaguete no piso azulejado, e eu posso lhe dizer exatamente quantas vezes esperar qu
fio de macarrão cruze uma linha. Essa versão generalizada do problema é chamada,
gaiatos da matemática, de *problema do macarrão de Buffon*.[o]

## O mar e a pedra

A prova de Barbier me lembra o que o geômetra e também algebrista Pierre Deligne esc
a seu professor, Alexander Grothendieck: "Nada parece acontecer, e todavia, no fim, a
um teorema altamente não trivial."[14]

Pessoas de fora muitas vezes têm a impressão de que a matemática consiste em a
ferramentas cada vez mais possantes para escavar cada vez mais fundo o desconh
como explosões abrindo túneis entre as rochas com explosivos mais e mais potentes. I
um jeito de fazer as coisas. Mas Grothendieck, que refez muito da matemática pura
própria imagem, nos anos 1960 e 1970, tinha uma visão diferente: "A coisa desconhe
ser conhecida me aparecia como uma faixa de terra ou solo duro, resistindo à penet
… o mar avança insensivelmente em silêncio, nada parecia acontecer, nada se mexia, a
estava tão longe que você mal a ouvia, … até afinal ela cercar a substância resistente."[1

O desconhecido é uma pedra no mar, que obstrui nosso progresso. Podemos t
introduzir dinamite nas frestas da rocha e detoná-la, e repetir a operação até que as r
se quebrem, como Buffon fez com suas complicadas computações de cálculo. Ou você
assumir uma abordagem mais contemplativa, permitindo que sua compreensão suba gr
e delicadamente de nível até que, após algum tempo, o que parecia um obstáculo seja co
pela água calma e suma.

A matemática tal como praticada hoje é uma delicada interação entre contemp
monástica e a explosão com dinamite.

## Um aparte sobre matemática e insanidade

Barbier publicou sua prova do teorema de Buffon em 1860, quando tinha apenas 21 a
era promissor estudante na École Normale Supérieure, em Paris. Em 1865, perturbad
uma condição nervosa, deixou a cidade sem endereço de referência. Nenhum matem
jamais o viu de novo até que um velho professor seu, Joseph Bertrand, o localizou num
para doentes mentais, em 1880. Quanto a Grothendieck, ele também abandonou a mat
tica acadêmica na década de 1980 e agora vive em reclusão, no estilo Salinger, em a
lugar nos Pireneus. Ninguém sabe realmente em que matemática ele está trabalhand
que está. Alguns dizem que pastoreia ovelhas.

Essas histórias soam como um mito popular sobre a matemática: ou ela lhe deixa l
ou é ela própria uma espécie de loucura. David Foster Wallace, o mais matemátic
romancistas modernos (certa vez ele fez uma pausa na ficção para escrever todo um
sobre a teoria dos conjuntos transfinitos!) qualificou o mito de o "melodrama da matem

genialidade de elevada altitude é também *hybris* e uma falha fatal". Filmes como *Uma* 
*brilhante*, *A prova* e *π* usam a matemática como expressão taquigráfica para obsessão 
da realidade. Um mistério policial que se tornou best-seller, *Acima de qualquer suspei* 
Scott Turow, lançou mão da mesma ideia, fazendo da própria esposa do herói uma 
mática que era na verdade a assassina louca. (Nesse caso, o mito vem acompanhado 
conteúdo de política sexual, indicando fortemente que a dificuldade de forçar um cé 
*feminino* a se ajustar ao arcabouço matemático fez a assassina romper os limites da sanid 
Pode-se encontrar uma versão mais recente do mito em *O estranho caso do cachorro* 
no qual a habilidade matemática se apresenta apenas como outra cor no espectro do aut

Wallace rejeita esse quadro melodramático da vida mental dos matemáticos, e eu tam 
Na vida real, os matemáticos são um bando bastante comum, não mais louco que a n 
Na realidade, não é muito comum escapulirmos para o isolamento a fim de travar ba 
solitárias em implacáveis campos abstratos. A matemática tende a fortalecer o racio 
em vez de forçá-lo até o ponto de ruptura. Se é que existe algum motivo para o mito, de 
que, em momentos de extrema tensão emocional, não há nada como um problem 
matemática para acalmar as queixas que estão mobilizando o resto da psique. A matem 
como a meditação, põe você em contato direto com o Universo, que é maior que voc 
estava aqui antes de você e que aqui estará depois de você. Eu ficaria louco se *não* f 
matemática.

## "Tentar fazer rolar"

Nesse meio-tempo, em Massachusetts…

Quanto mais gente jogava Cash WinFall, menos lucrativo o jogo ficava. Cada g 
apostador que entrava no jogo dividia os prêmios em novos pedaços. A certa altura, 
Gerald Selbee me contou,[16] Yuran Lu, da Random Strategies, sugeriu que eles e o gru 
Selbee entrassem num acordo para se revezar jogando as rolagens e garantir a cada 
uma margem de lucro maior. Selbee parafraseou a proposta de Yuran como: "Você 
jogador grande, eu sou um jogador grande, não podemos controlar os outros jogadore 
são moscas na nossa sopa." Cooperando, Selbee e Lu poderiam ao menos contro 
mutuamente. O plano fazia sentido, mas Selbee não mordeu a isca. Ele se sentia à vo 
explorando um furo do jogo, uma vez que as regras eram públicas, acessíveis a qua 
outro jogador como eram para ele. No entanto, entrar em conluio com outros aposta 
– embora não estivesse claro que isso violaria qualquer regra da loteria – dava uma g 
sensação de estar trapaceando. Então, os cartéis estabeleceram um equilíbrio, todo 
despejando dinheiro em cada sorteio rolado. Com os apostadores de alto volume compr 
de 1,2 a 1,4 milhão de bilhetes por sorteio, Selbee estimava que os bilhetes de loteria en 
de rolagem tinham um valor esperado de apenas 15% a mais que o custo.

Ainda é um lucro muito bom. Mas Harvey e seus confederados não estavam satisf 
A vida de um ganhador de loteria profissional não é a charge engraçadinha que às ve 
imagina. Para Harvey, dirigir a Random Strategies era serviço em tempo integral,

loteria precisavam ser comprados e preenchidos à mão. No próprio dia do sorteio, H
precisa administrar a logística dos múltiplos membros da equipe percorrendo todos ao
guichês das lojas de conveniência que topavam aceitar as mega-apostas do grupo. E, d
de anunciados os números vencedores, ainda havia a longa estafa de separar os bi
vencedores dos perdedores. Não que se pudesse jogar os bilhetes perdedores no lixo. H
os guardava em caixas de armazenagem, porque, quando se ganha muito na lote
Secretaria de Fazenda faz muita auditoria, e Harvey precisaria documentar suas ativi
de jogo. (Gerald Selbee ainda tem uns vinte e tantos recipientes de plástico cheios de bi
de loteria perdedores, no valor de cerca de US$ 18 milhões, ocupando os fundos d
celeiro de sua propriedade.) Os bilhetes vencedores também exigiam algum esforço.
membro do grupo tinha de preencher um formulário de imposto individual para
sorteio, não importando o tamanho do prêmio. Ainda parece divertido?

O inspetor-geral estima que a Random Strategies ganhou US$ 3,5 milhões, com imp
incluídos, durante os sete anos de vida do Cash WinFall. Não sabemos quanto desse din
foi para James Harvey, mas sabemos que ele comprou um carro.

Era um Nissan Altima 1999 usado.

Os bons tempos, os primeiros dias do Cash WinFall, quando se podia dobrar o din
com facilidade, não estavam tão distantes no passado. Decerto Harvey e seu time qu
voltar a eles. Mas como, se a família Selbee e o Doctor Zhang Lottery Club compr
centenas de milhares de bilhetes em cada sorteio com rolagem?

A única hora em que os outros apostadores de alto volume davam um tempo era qu
a bolada não era grande o bastante para deflagrar uma rolagem para baixo. Mas H
também excluía esses sorteios, e por um bom motivo: sem o dinheiro da rolagem, a l
era uma péssima aposta.

Na sexta-feira, 13 de agosto de 2010, a loteria projetava uma bolada para o sorte
segunda-feira seguinte de US$ 1,675 milhão, bem abaixo do limiar de rolagem. Os c
de Zhang e Selbee estavam quietos, esperando a bolada aumentar acima do limi
rolagem. Mas a Random Strategies fez um jogo diferente. Nos meses anteriores, eles ha
preparado sigilosamente centenas de milhares de bilhetes extras, esperando pelo dia en
a bolada projetada estivesse perto de US$ 2 milhões, mas sem chegar lá. O dia era
Durante o fim de semana, seus membros esvoaçaram pela Grande Boston comprando
bilhetes do que alguém jamais comprara antes, cerca de 700 mil ao todo. Com a in
inesperada de dinheiro da Random Strategies, a bolada na segunda-feira, 16 de a
estava em US$ 2,1 milhões. Era uma rolagem para baixo, dia de pagamento para os joga
da loteria, e ninguém, exceto os estudantes do MIT, sabia o que estava por chegar. (
90% dos bilhetes do sorteio estavam nas mãos do time de Harvey. Eles estavam pa
diante da torneira de dinheiro, totalmente sozinhos. Quando o sorteio terminou, a Ra
Strategies tinha ganhado US$ 700 mil acima do investimento de US$ 1,4 milhão, um
lucro de 50%.

O truque não funcionaria duas vezes. Quando a loteria percebeu o que havia acont
montou-se um sistema de alerta imediato para notificar a alta administração se um
equipes tentava forçar unilateralmente o grande prêmio acima da linha de rolagem. Qu

manhã de 24 de dezembro, três dias antes do sorteio, o chefe administrativo da l
recebeu um e-mail de sua equipe dizendo: "Os caras do Cash WinFall estão tentando
rolar de novo." Se Harvey apostou que os funcionários da loteria estariam de folga no fe
a aposta foi errada. De manhã cedo, no dia de Natal, a loteria atualizou seu grande pı
estimado para anunciar ao mundo que estava chegando uma rolagem. Os outros ca
ainda ressentidos com o golpe de agosto, cancelaram suas férias de Natal e compı
centenas de milhares de bilhetes, trazendo os lucros de volta aos níveis normais.

Em todo caso, o jogo estava quase no fim. Pouco tempo depois, um amigo da rep
Andrea Estes, do *Boston Globe*,[17] notou algo engraçado na "lista 20-20" de ganhadore
a loteria torna pública: havia um monte de gente de Michigan ganhando prêmios, e
ganhavam num jogo em particular, o Cash WinFall. Será que Estes pensou que havia
de esquisito naquilo? Quando o *Globe* começou a fazer perguntas, o quadro todo ficou
Em 31 de julho de 2011, o *Globe* saiu com uma matéria de primeira página[18] da auto
Estes e Scott Allen explicando como três clubes de apostas haviam monopolizado os pré
do Cash WinFall. Em agosto, a loteria mudou as regras do WinFall, impondo um te
US$ 5 mil para a venda total e bilhetes que qualquer lotérica individual podia desemb
num dia, impedindo os cartéis de fazer suas compras de grande volume. Mas o mal já e
feito. Se o objetivo do Cash WinFall era parecer um negócio melhor para os joga
comuns, o jogo agora não tinha mais sentido. O último sorteio do Cash WinFall – justar
uma rolagem – ocorreu em 23 de janeiro de 2012.

## Se jogar é empolgante, você está fazendo errado

James Harvey não foi a primeira pessoa a tirar vantagem de uma loteria estadual malc
bida. O grupo de Gerald Selbee fez milhões no WinFall original de Michigan antes
administração ficar esperta e fechar o jogo, em 2005. A prática recua muito mais no te
No começo do século XVIII,[19] a França financiava os gastos do governo vendendo b
mas a taxa de juros oferecida não era atraente o bastante para gerar vendas. A fim d
um tempero à coisa, o governo vinculou uma loteria à venda de bônus. Cada bônus da
proprietário o direito de comprar um bilhete de loteria com prêmio de £ 500 mil, din
suficiente para viver com conforto durante décadas. Mas Michel Le Peletier des Fo
vice-ministro das finanças que concebeu o plano da loteria, havia feito emendas nos cálc
os prêmios a serem desembolsados excediam substancialmente o dinheiro a ser ganho
a receita dos bilhetes. Em outras palavras, a loteria, como o Cash WinFall nos di
rolagem, tinha um valor esperado positivo para os jogadores, e quem comprasse bi
suficientes estava destinado a ter grande resultado.

Uma pessoa que descobriu isso foi o matemático e explorador Charles-Marie d
Condamine. Como Harvey faria quase três séculos depois, ele reuniu os amigos num
de compra de bilhetes. Um deles era o jovem escritor François-Marie Arouet, mais conh
como Voltaire. Ainda que não tenha contribuído para a matemática do esquema, Vo
deixou nele sua marca. Os jogadores da loteria deviam escrever em seu bilhete um le

“Todos os homens são iguais!” e “Vida longa a M. Peletier des Forts!” em seus bilhete: consumo público quando o cartel ganhou o prêmio.

Finalmente, a administração pública percebeu e cancelou o programa, mas não ante La Condamine e Voltaire tivessem tirado do governo dinheiro suficiente para se torr homens ricos para o resto da vida. O quê, você achava que Voltaire ganhava a vida escrev ensaios e epigramas perfeitos? Naquela época, como agora, esse não era o jeito de ficar

A França do século XVIII não tinha computador, telefone, nem meios rápid coordenar informações sobre quem estava comprando bilhetes de loteria e onde. Você ver por que o governo levou alguns meses para pegar o esquema de Voltaire e La Conda Mas qual era a desculpa de Massachusetts? A história do *Globe* saiu *seis anos* depois loteria começou a observar estudantes de faculdade fazendo grandes compras em s mercados perto do MIT. Como podiam ignorar o que estava se passando?

É simples, eles não sabiam o que estava se passando. E nem sequer tinham de inves porque James Harvey viera ao escritório da loteria em Braintree em janeiro de 2005, que seu cartel fizesse a primeira aposta, antes até de o cartel ter um nome. Seu plano pa bom demais para ser verdade, uma coisa tão segura que devia haver alguma ba regulatória para realizá-la. Ele foi à loteria para ver se seu esquema de grande volu apostas estava dentro das regras. Não sabemos exatamente o que foi conversado, mas parece ter redundado em “Claro, garoto, vá nessa”. Harvey e companhia fizeram sua pri grande aposta algumas semanas depois.

Gerald Selbee chegou não muito depois. Ele me contou que teve um encontro co advogados da loteria em Braintree, em agosto de 2005, para informá-los de que sua c ração de Michigan iria comprar bilhetes de loteria em Massachusetts. A existência de ap de grande volume não era segredo para o estado.

Mas por que Massachusetts haveria de permitir que Harvey, doutor Zhang e a fa Selbee embolsassem quantias públicas na casa dos milhões? Que tipo de cassino dei jogadores baterem a casa, semana após semana, sem tomar nenhuma atitude?

Desvendar isso exige que se pense um pouco mais meticulosamente sobre como a l funciona. De cada US$ 2 de bilhete vendido, o estado de Massachusetts ficava com 0,80. Parte desse dinheiro era usada para pagar comissões a lotéricas e operar a pr loteria. O resto era mandado para os governos municipais por todo o estado, eram US$ 900 milhões em 2011, para pagar a policiais, financiar programas escolares e, de f geral, tapar os buracos nos orçamentos municipais.

O US$ 1,20 era injetado de volta no prêmio a ser distribuído entre os jogadores você se lembra do cálculo que fizemos bem lá no começo? O valor esperado de um bi num dia normal, é de apenas US$ 0,80, o que significa que o estado está devolvend média, US$ 0,80 por bilhete vendido. Mas o que acontece com os US$ 0,40 restantes que entra a rolagem. Dar US$ 0,80 por bilhete não é o bastante para esgotar o fun prêmio, então a bolada cresce toda semana, até atingir US$ 2 milhões e rolar para ba é então que a loteria muda de natureza, as comportas são abertas e o dinheiro acum jorra para as mãos de quem é suficientemente esperto para ficar esperando.

Poderia parecer que, nesse dia, o estado de Massachusetts está perdendo dinheiro

o começo haviam sido marcados como dinheiro de prêmio. O estado pega seus US$ 0,
cada bilhete e devolve o resto. Quanto mais bilhetes forem vendidos, maior é a receit
entra. O estado não se importa com quem ganha, só se importa com quantas pessoas jo

Então, quando os cartéis de apostas embolsavam seus gordos lucros nas apostas e
de rolagem, não estavam tirando dinheiro do estado. Tiravam dos outros jogadore
especial daqueles que tomavam a decisão errada de jogar na loteria em dias sem rol
Os cartéis não estavam batendo a casa. *Eles eram a casa*.

Como os operadores de um cassino em Las Vegas, os apostadores de grande volum
eram totalmente imunes ao azar. Qualquer jogador de roleta pode ter uma sequ
vencedora e tirar um monte de dinheiro do cassino. A mesma coisa poderia ter acont
aos cartéis se um apostador comum tivesse acertado os seis números, desviando to
dinheiro da rolagem para sua própria bolada. Mas Harvey e os outros haviam fe
cálculos com cuidado suficiente para tornar esse resultado raro o bastante para ser tole
Uma única vez em todo o decorrer do Cash WinFall alguém realmente ganhou o g
prêmio num dia de rolagem. Se você faz apostas suficientes com as probabilidades desv
a seu favor, o simples volume da sua vantagem dilui qualquer azar que você possa ter.

Isso torna jogar na loteria algo menos empolgante, com toda a certeza. Mas, para H
e outros apostadores de grandes volumes, a questão não era empolgação. Sua abord
era governada por uma máxima simples: *se jogar é empolgante, você está fazendo errad*

Se os cartéis de apostas eram a casa, então quem era o estado de Massachusetts? O e
era ... o estado. Assim como Nevada cobra dos cassinos uma porcentagem de seus lu
em troca de manter a infraestrutura e a regulamentação que permitem que seus neg
prosperem, Massachusetts recebia sua parte constante do dinheiro que os cartéis injeta
Quando a Random Strategies comprou 700 mil bilhetes para deflagrar a rolagem, as ci
de Massachusetts receberam seus US$ 0,40 de cada um desses bilhetes, num total de
560 mil. Estados não gostam de jogar, haja boas chances ou não. Estados gostam de c
impostos. Em essência, era isso que a Loteria Estadual de Massachusetts estava faz
aliás, com bastante sucesso. Segundo o relatório do inspetor-geral, a loteria arrecadou
120 milhões de receita no Cash WinFall. Quando você sai com uma bolada de nove dí
provavelmente não lhe afanaram grana nenhuma.

Então, de quem afanaram? A resposta óbvia é "dos outros jogadores". Era o din
deles, afinal, que acabava rolando para os bolsos dos cartéis. Mas o inspetor-geral Su
concluiu seu relatório num tom de voz sugestivo de que, no fim das contas, não ha
tirado grana de ninguém:

> Enquanto a loteria anunciava ao público um iminente grande prêmio de US$ 2 milhões que tinha a probabili
> deflagrar uma rolagem, um apostador comum, comprando um único bilhete ou qualquer quantidade de bilhe
> estava em desvantagem em relação às apostas de grande volume. Em suma, as chances de qualquer pessoa ace
> bilhete vencedor não eram afetadas pelas apostas em grande volume. Pequenos apostadores desfrutavam as m
> chances que apostadores de grande volume. Quando o grande prêmio chegava ao limiar de rolagem, o Cash W
> tornava-se uma aposta boa para todo mundo, não só para os grandes apostadores.[20]

Sullivan está certo quanto ao fato de a presença de Harvey e dos outros cartéis não
a chance de algum outro jogador ganhar. Mas ele comete o mesmo erro de Adam Smi

você pode esperar ganhar ou perder. As compras dos cartéis, de centenas de milhai bilhetes, aumentavam substancialmente o número de pedaços em que um prêmio "rc seria fatiado, o que tornava cada bilhete ganhador menos valioso. Nesse sentido, os c estavam prejudicando o jogador médio.

Analogia: se aparece pouca gente na rifa da igreja, é bem provável que eu ganhe caçarola. Quando aparecem cem pessoas novas e compram bilhetes da rifa, minha cl de ganhar a caçarola cai. Isso pode me deixar infeliz. Mas é injusto? E se eu descobri essas cem pessoas estão todas na verdade trabalhando para um mentor que quer, de ver ganhar a caçarola e calculou que o custo de uma centena de bilhetes da rifa é 10% n que o preço da caçarola no varejo? De algum modo, isso é algo antidesportivo, ma posso realmente dizer que me sinto vítima de trapaça. Claro que uma rifa cheia de g melhor que uma rifa vazia, para a igreja ganhar dinheiro, o que, no fim, é o objeti empreitada.

Ainda assim, mesmo que os apostadores de grandes volumes não sejam gatunos, h de desconcertante na história do Cash WinFall. Em virtude das regras equívocas do jo estado acabou fazendo o equivalente a licenciar James Harvey como proprietário d cassino virtual, tirando mês após mês dinheiro dos jogadores menos sofisticados. Ma que isso não significa que as regras eram ruins? Como disse William Galvin, secretái Estado de Massachusetts, ao *Globe*: "É uma loteria privada para pessoas habilidos questão é: por quê?"[21]

Se você voltar aos números, uma possível resposta se impõe. Lembre-se, o objeti mudar para WinFall era aumentar a popularidade da loteria. E eles conseguiram, mas não tão bem como tinham planejado. E se o zum-zum-zum em torno do Cash W tivesse ficado tão intenso que a loteria começasse a vender 3,5 milhões de bilhetes moradores comuns toda vez que chegasse o dia da rolagem? Lembre-se, quanto mais joga, maior é a parte de 40% do estado. Como calculamos antes, se o estado venc milhões de bilhetes, ele sai na frente mesmo no dia da rolagem. Em tais circunstânci apostas em grande volume não são mais lucrativas: o ciclo se fecha, os cartéis se disso e todo mundo, exceto os próprios jogadores de grandes volumes, acaba contente.

Vender tantos bilhetes teria sido uma aposta arriscada, mas os funcionários da l em Massachusetts podem ter pensado que se tivessem sorte poderia dar certo. De forma, o estado, no fim das contas, gostava de jogar.

---

[a] Uma análise mais refinada "do preço correto" também levaria em consideração minhas sensações sobre risco. Volt a esse assunto no próximo capítulo.

[b] Esse posto ainda existe! Mas agora é sobretudo honorário, uma vez que a remuneração anual de £ 100 perm inalterada desde que Carlos II estabeleceu o posto, em 1675.

[c] Outros Estados, já como a Roma do século III, haviam entendido que o preço apropriado de uma anuidade preci maior quando o comprador era mais jovem (ver Edwin W. Kopf, "The early History of the annuity", *Proceeding Casualty Actuarial Society*, n.13, 1926, p.225-66.

[d] Todo o raciocínio feito a seguir pode ser, salvo pequenas diferenças, tranquilamente transposto para a nossa Meg (N.T.)

[e] Ou assim me parece. Não fui capaz de obter estatísticas oficiais para as vendas de bilhetes, mas você pode co

[f] Para leitores que queiram aprofundar-se ainda mais nos detalhes teóricos de decisões da loteria, uma ótima “Finding good bets in the lottery, and why you shouldn’t take them”, de Aaron Abrams e Skip Garibaldi (*The A Mathematical Monthly*, v.117, n.1, jan 2010, p.3-26). O título do artigo serve como resumo da conclusão dos autor

[g] Da forma como ocorreu, apenas sete pessoas acertaram cinco números naquele dia, de modo que cada um sortudos recebeu um prêmio de mais de US$ 80 mil. Mas a escassez de ganhadores parece ter sido azar, e não alg pudesse antecipar quando se computa o valor esperado de um bilhete.

[h] Dada a popularidade do Cash WinFall, isso é de fato surpreendente. Havia cerca de 10% de chance por “rolagem” alguém viesse a ganhar a bolada, então, deveria ter acontecido quatro ou cinco vezes. Que tenha acontecido apen vez, pelo que eu entendo, foi puro azar, ou, se você preferir, boa sorte para as pessoas que contavam com esses “rolados”.

[i] O autor usa aqui um trocadilho de impossível tradução: *winFall* e *windfall.* A palavra *windfall*, traduzida ao pé significa “derrubado pelo vento”; mas é também usada para referir-se a uma herança inesperada, ou seja, que foi pelo vento”. (N.T.)

[j] Contanto que ignoremos o dinheiro de prêmio que não vem da “rolagem”; mas, como vimos, esse dinheiro não rep muito.

[k] Ainda ignorando o dinheiro que não vem do fundo do grande prêmio.

[l] Aquele da regra de Cramer, para todos os fãs da álgebra linear presentes na casa.

[m] Na realidade, não está totalmente claro para mim se ele era de fato “Buffon” na época de sua apresentação Academia. Para começar, seu pai, que havia comprado o título de conde de Buffon, administrara tão mal os negó precisou vender as propriedades de Buffon, ligadas ao condado, e nesse meio-tempo se casara com uma moça de Georges-Louis processou e aparentemente conseguiu atrair para si a fortuna do tio de sua mãe, que não tinha filho lhe permitiu comprar de volta tanto as terras quanto o título.

[n] Você poderia alegar que, já que a agulha tem o comprimento exatamente igual à largura da ripa, é possível que a toque duas frestas. Mas isso requer que a agulha ocupe *exatamente* a ripa; é possível, mas a probabilidade de aconteça é zero, portanto, podemos seguramente ignorá-la.

[o] Trocadilho intraduzível do inglês. “*Buffon’s needle, Buffon’s noodle*” corresponde a “agulha de Buffon, macarrão de (N.T.)

# 12. Perca mais vezes o avião!

George Stigler, Prêmio Nobel de Economia de 1982, costumava dizer: "Se você n perde o avião, está passando tempo demais no aeroporto."[1] Esse é um slogan intuitiv particular se você perdeu um voo recentemente. Quando estou preso no aeropor O'Hare, comendo um fétido sanduíche de galinha por US$ 12, poucas vezes me des aplaudindo meu bom senso econômico. No entanto, por mais esquisito que soe o slog Stigler, um cálculo de valor esperado mostra que ele está completamente correto – menos para pessoas que voam muito. Para simplificar as coisas, podemos considerar plesmente três alternativas.

Opção 1: chegar duas horas antes do voo, perder o voo 2% das vezes.
Opção 2: chegar 1,5 hora antes do voo, perder o voo 5% das vezes.
Opção 3: chegar uma hora antes do voo, perder o voo 15% das vezes.

Quanto custa a você perder um voo depende fortemente do contexto, claro. Uma c perder uma ponte aérea para Washington, DC e pegar o voo seguinte, outra coisa é p o último voo quando você está tentando chegar a um casamento da família às dez da m seguinte. Na loteria, tanto o custo do bilhete quanto o tamanho do prêmio são mencion em dólares. É muito menos claro pesar o custo do tempo que perderíamos sentad terminal em relação ao custo de perder o voo. Ambas as coisas são aborrecidas, ma existe moeda universalmente reconhecida para o aborrecimento.

Pelo menos não existe moeda no papel. Mas as decisões precisam ser tomadas economistas querem nos dizer como tomá-las, então, alguma versão do dólar de abo mento precisa ser elaborada. A história econômica padrão é que seres humanos, qu agem racionalmente, tomam decisões que maximizam sua *utilidade*. Tudo na vida utilidade. Coisas boas, como dólares e bolo, têm utilidade positiva, enquanto coisas como dedão do pé inchado e voos perdidos, têm utilidade negativa. Algumas pessoas go de medir utilidade numa unidade-padrão chamada *Util*, plural *Utis*.[a] Digamos que hora do seu tempo em casa valha um Util; então, chegar duas horas antes do voo lhe dois Utis, enquanto chegar uma hora antes custa apenas um. Perder o avião é claram pior que perder uma hora do seu tempo. Se você acha que vale seis horas do seu te pode pensar num voo perdido como algo que custa seis Utis.

Tendo traduzido tudo para Utis, podemos agora comparar os valores esperados da estratégias.

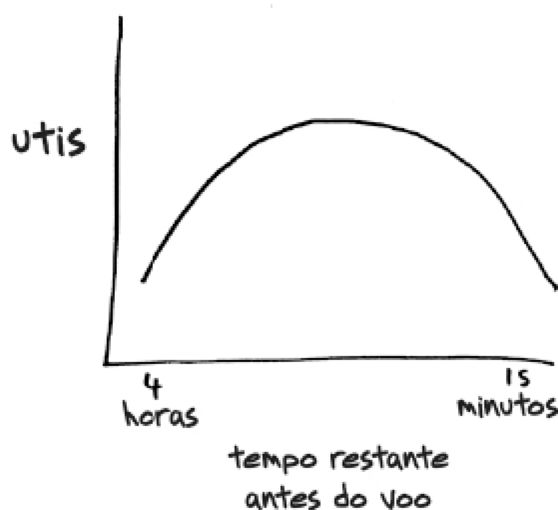
| | |
|---|---|
| **Opção 1** | −2 + 2% × (−6) = −2,12 Utis |
| **Opção 2** | −1,5 + 5% × (−6) = −1,8 Utis |
| **Opção 3** | −1 + 15% × (−6) = −1,9 Utis |

A Opção 2 é a que lhe custa menos utilidade em média, mesmo que venha com chance nada trivial de você perder o voo. Sim, ficar encalhado no aeroporto é dolor desagradável – mas é tão doloroso e desagradável que vale a pena perder toda vez meia a mais no terminal para reduzir a já pequena chance de perder o avião?

Talvez você diga sim. Talvez você *deteste* perder o voo, e perder um voo lhe custe Utis, não seis. Então o cálculo acima se altera, e a opção conservadora torna-se a es preferida, com um valor esperado de

−2 + 2% (−20) = −2,4 Utis.

Mas isto não quer dizer que Stigler esteja errado; o *tradeoff* – a compensação rela muda para um lugar diferente. Você pode reduzir ainda mais sua chance de perder o chegando com três horas de antecedência. Mas fazer isso, mesmo que reduzindo sua c de perder o avião para zero, viria com um custo garantido de três Utis para o voo, torn a uma alternativa pior do que a Opção 1. Se você puser num gráfico o número de hora fica no aeroporto em relação à utilidade esperada, obtém um quadro mais ou menos a




É outra vez a curva de Laffer! Aparecer quinze minutos antes de o avião partir vai lh uma probabilidade muito alta de perder o voo, com toda a utilidade negativa qu implica. De outro lado, chegar com muitas horas de antecedência também lhe custa m Utis. O curso de ação ideal fica em algum ponto intermediário. Exatamente *onde* el isso depende de como você se sente pessoalmente em relação aos méritos relativos da de um voo e a perda de tempo. Mas a estratégia ideal sempre lhe atribui uma util positiva de perder o voo – pode ser pequena, mas não zero. Se você literalmente n perde um voo, pode estar deslocado muito para a esquerda da melhor estratégia. Com Stigler, você deveria economizar Utis e perder mais vezes o avião.

Claro que esse tipo de cálculo é necessariamente subjetivo. Sua hora extra no aero

galinha do aeroporto.) Então, não se pode pedir à teoria que despeje um tempo idea chegar ao aeroporto nem uma quantidade ideal de voos a serem perdidos. A informa qualitativa, não quantitativa. Não sei qual sua probabilidade ideal de perder um avião, que não é zero.

Um alerta: na prática, uma probabilidade próxima de zero pode ser difícil de disti de uma probabilidade que realmente seja zero. Se você é um economista global bada aceitar o risco de 1% de perder um voo poderia na realidade significar perder um voo ano. Para a maioria das pessoas, risco tão baixo pode muito bem significar passar a toda sem perder um voo – então, se 1% é o nível de risco certo para você, sempre pe avião não quer dizer que você esteja fazendo algo de errado. Da mesma maneira, nin usa o argumento de Stigler para dizer: "Se você nunca teve perda total no carro é p está guiando devagar demais." O que Stigler diria é que, se você *não tem risco nenhu* perda total no carro, está guiando muito devagar, o que é em geral verdade; o único je nunca ter risco é jamais guiar!

O argumento ao estilo de Stigler é uma ferramenta conveniente para todos os tip problema de otimização. Peguemos o desperdício governamental: não se passa um mê ler algo sobre algum funcionário estatal que jogou com o sistema para obter uma p desproporcional, ou um fornecedor do Departamento de Defesa que se safou com p absurdamente inflados, ou uma agência municipal que há muito deixou de ter funçãc que continua existindo à custa do público graças à inércia e aos padrinhos poderosos. T disso é um artigo do blog do *Wall Street Journal's Washington Wire* de 24 de junho de

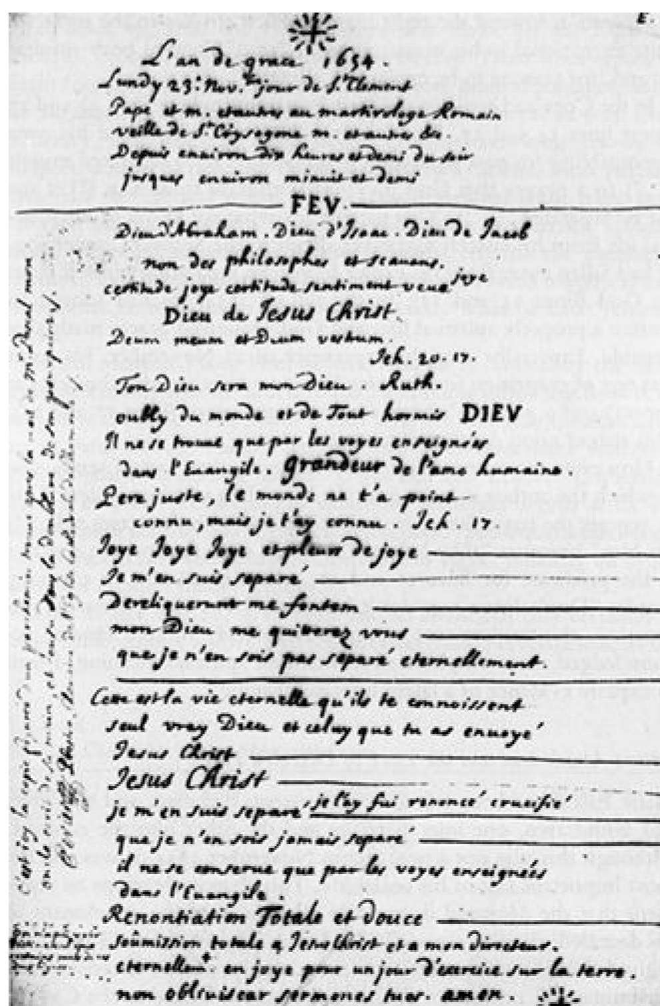
> O inspetor-geral da administração da Previdência Social disse na segunda-feira que a agência pagou, indevida US$ 31 milhões em benefícios para 1.546 americanos que se acredita estarem mortos.
>
> Para piorar potencialmente as coisas para a agência, o inspetor-geral disse que a administração da Previdênci tem certidão de óbito de cada pessoa registrada nos arquivos do banco de dados do governo, sugerindo que se saber que esses americanos tinham morrido e suspender seus pagamentos.[2]

Por que permitimos que esse tipo de coisa persista? A resposta é simples. Elimi desperdício tem um custo, assim como chegar cedo ao aeroporto tem um custo. Vigil e cumprimento da lei são metas dignas, mas eliminar *todo* o desperdício, assim eliminar mesmo a mais remota chance de perder o avião, tem um custo que pesa ma o benefício. Como observou o blogueiro (e ex-participante de competições matemá Nicholas Beaudrot,[3] esses US$ 31 milhões representam 0,004% dos benefícios desemb dos anualmente pela Previdência. Em outras palavras, a agência já é *extremamente b* saber quem está vivo e quem está morto. Melhorar ainda mais essa distinção, busc eliminar esses poucos últimos erros, pode ser caro. Se vamos contar em Utis, não deveri perguntar "Por que estamos desperdiçando o dinheiro dos contribuintes?", e sim "Q quantia exata de dinheiro dos contribuintes estamos desperdiçando?". Parafraseando St se o seu governo não desperdiça nada, você está passando tempo demais combater desperdício do governo.

## Mais uma coisa sobre Deus, depois prometo que acabou

Uma das primeiras pessoas a pensar claramente sobre valor esperado foi Blaise P Intrigado com algumas questões apresentadas a ele pelo jogador Antoine Gombauc tointitulado Chevalier de Méré), Pascal passou metade do ano de 1654 trocando carta: Pierre de Fermat, tentando entender quais apostas, repetidas vezes e vezes seguidas, t riam a ser lucrativas a longo prazo e quais levariam à ruína. Na terminologia moderr desejava entender quais tipos de aposta tinham valor esperado positivo e quais tipos negativos. Em geral, considera-se a correspondência Pascal-Fermat o marco inicial da da probabilidade.

Na noite de 23 de novembro de 1654, Pascal, já um homem religioso, vivenciou intensa experiência mística que documentou em palavras da melhor forma que pôde:


L'an de grace 1654.
Lundy 23e Nov.bre jour de St Clement
Pape et m. et autres au martirologe Romain
veille de St Chrysogone m. et autres &c.
Depuis environ dix heures et demi du soir
jusques environ minuit et demi
FEV
Dieu d'Abraham. Dieu d'Isaac. Dieu de Jacob
non des philosophes et scavans.
certitude joye certitude sentiment veue joye
Dieu de Jesus Christ.
Deum meum et Deum vestrum. Jeh. 20.17.
Ton Dieu sera mon Dieu. Ruth.
oubly du monde et de Tout hormis DIEV
Il ne se trouve que par les voyes enseignées
dans l'Evangile. Grandeur de l'ame humaine.
Pere juste, le monde ne t'a point
connu, mais je t'ay connu. Jeh. 17.
Joye Joye Joye et pleurs de joye
Je m'en suis separé
Dereliquerunt me fontem
mon Dieu me quitterez vous
que je n'en sois pas separé eternellement.
Cette est la vie eternelle qu'ils te connoissent
seul vray Dieu et celuy que tu as envoyé
Jesus Christ
Jesus Christ
je m'en suis separé je l'ay fui renoncé crucifié
que je n'en sois jamais separé
il ne se conserve que par les voyes enseignées
dans l'Evangile.
Renontiation Totale et douce
Soumission totale a Jesus Christ et a mon directeur.
eternellem.t en joye pour un jour d'exercice sur la terre.
non obliviscar sermones tuos. amen.

O *Mémorial*, cópia em pergaminho.
Foto: © Bibliothèque Nationale de France, Paris.

FOGO.
Deus de Abraão, Deus de Isaac, Deus de Jacó
E não dos filósofos e dos sábios. …
Eu me afastei Dele, afastei-O, reneguei-O, crucifiquei-O.
Que eu jamais Dele me afaste!
Não se conserve senão pelos caminhos emanados do Evangelho.
Renúncia total e doce.
Submissão completa a Jesus Cristo e ao meu diretor.

Pascal coseu essa página de anotações no forro de seu casaco e a manteve ali pelo r
da vida. Após sua "noite de fogo", Pascal se retirou da matemática, dedicando todo seu
empenho a temas religiosos. Em 1660, quando seu velho amigo Fermat escreveu para
propor um encontro, respondeu:

Pois conversar francamente com você sobre geometria para mim é o melhor de todos os exercícios intelectuais,
mesmo tempo reconheço que é tão inútil eu poder achar pouca diferença entre um homem que nada mais é
geômetra e um hábil artesão. … meus estudos me levaram para tão longe dessa forma de pensar que eu mal
me lembrar de que existe algo como a geometria.[4]

Pascal morreu dois anos depois, aos 39 anos, deixando atrás de si uma coleç
anotações e breves ensaios destinados a reunir num livro de defesa do cristianismo
foram posteriormente reunidos como *Pensées*, que surgiram oito anos após sua mo
uma obra notável, aforística, incessantemente sujeita a citações, sob muitos aspectos
peradora, sob muitos aspectos inescrutável. Grande parte do livro aparece em breves
ções numeradas:

199. Imaginemos um número de homens acorrentados, todos condenados à morte, em que alguns são mortos
à vista dos outros, e aqueles que restam veem seu próprio destino no dos seus companheiros, e esperam
olhando-se uns aos outros com tristeza e sem esperança. Essa é uma imagem da condição dos homens. …

209. És tu menos escravo por seres amado e favorecido pelo senhor? Tu estás de fato bem de vida, escra
senhor te favorece; em breve ele te castigará.

Mas os *Pensées* são realmente famosos pelo pensamento 233, que Pascal inti
"Infinite-rien", mas que é universalmente conhecido como "A aposta de Pascal".

Como mencionamos, Pascal considerava a questão da existência de Deus um tem
a lógica não pode tocar: "'Deus é, ou Ele não é.' Mas para que lado havemos de nos inc
Aqui, a razão nada pode decidir." Mas Pascal não para por aí. O que é a questão da cr
pergunta ele, se não um tipo de jogo, um jogo com as mais altas apostas, um jogo que
não tem escolha a não ser jogar? A análise das apostas, a distinção entre o jogo intelig
o jogo tolo, era um assunto que Pascal entendia melhor que quase todo mundo. Afin
não havia deixado totalmente para trás o seu trabalho matemático.

Como Pascal computa o valor esperado do jogo da fé? A chave já está presente e
revelação mística:

Júbilo eterno por um dia de provação na terra.

O que é isso além de uma avaliação dos custos e benefícios de adotar a fé? Mesm
meio à comunhão extática com seu salvador, Pascal ainda fazia matemática! Adoro isso

Para calcular o valor esperado de Pascal, ainda precisamos da probabilidade de que
exista. Vamos dizer por um momento que sejamos céticos fervorosos e atribuir
hipótese a probabilidade de apenas 5%. Se acreditamos em Deus, e se estivermos c
então nossa recompensa é "júbilo eterno", ou, em termos dos economistas, infinitos
Se acreditamos em Deus e estivermos *errados* – um resultado acerca do qual estamos
seguros –, então pagamos um preço, talvez mais do que o "um dia de provação" que P
sugere, já que temos de contar não só o tempo gasto no culto a Deus, mas o cus

oportunidade de todos os prazeres libertinos de que abdicamos na nossa busca de salv
Ainda assim, é uma certa soma fixa, digamos cem Utis.

Então, o valor esperado da crença é

(5%) × infinito + 95% (−100)

Agora, 5% é um número pequeno. Mas júbilo infinito é muito júbilo; 5% disso ai infinito. Então, ele supera de longe qualquer custo finito nos imposto por adotar a reli

Já debatemos os riscos de tentar atribuir uma probabilidade numérica a uma propo como "Deus existe". Não está claro que tal atribuição faça sentido. Mas Pascal nã nenhuma jogada numérica tão esperta. E não precisa fazer. Porque não importa se número é 5% ou outra coisa. Um por cento de infinita bem-aventurança ainda é aventurança infinita, e supera qualquer custo finito que esteja ligado a uma vida p mesmo vale para 0,1% ou 0,000001%. Tudo que importa é que a probabilidade de que existа é *diferente de zero*. Você não está disposto a conceder esse ponto? De que a exist da divindade pelo menos é *possível*? Se sim, então, o cálculo do valor esperado p inequívoca: vale a pena acreditar. O valor esperado dessa escolha não só é positivo, co infinitamente positivo.

O argumento de Pascal tem sérias falhas. A mais grave é que sofre do problema do de Cartola que vimos no Capítulo 10, deixando de considerar todas as hipóteses poss No esquema de Pascal, há somente duas opções: que o Deus da cristandade é r recompensará esse setor particular dos fiéis, ou que esse Deus não existe. Mas e se e um Deus que condene os cristãos por toda a eternidade? Esse Deus também é poss essa possibilidade já é suficiente para matar o argumento. Agora, adotando o cristian estamos apostando numa chance de júbilo infinito, mas também assumindo o ris tormento infinito, sem nenhum meio determinado por princípios para pesar as possib des relativas das duas opções. Voltamos ao ponto de partida, no qual a razão nada decidir.

Voltaire formulou uma objeção diferente. Seria de esperar que ele fosse simpático à a de Pascal – como já vimos, Voltaire não fazia objeção à jogatina e admirava a matem Sua atitude em relação a Newton aproximava-se da adoração (uma vez Voltaire chan "o deus a quem me sacrifico"), e durante muitos anos ele teve um envolvimento româ com a matemática Émilie du Châtelet. Mas Pascal não era bem o tipo de pensador ig Voltaire. Os dois se contrapunham por sobre um abismo temperamental e filosófico. A em geral mais arejada de Voltaire não tinha lugar para as opiniões sombrias, introspe e místicas de Pascal. Voltaire chamava Pascal de "sublime misantropo", e dedicou um ensaio[5] a derrubar, tijolo por tijolo, o soturno *Pensées*. Sua atitude em relação a Pascal um garoto esperto e popular em relação a um cê-dê-efe amargo e inconformado.

Quanto à aposta, Voltaire disse que era "um pouco indecente e pueril: a ideia de um e de perda e ganho, não beneficia em nada a gravidade do tema". De forma mais substa "O interesse que tenho em acreditar numa coisa não é prova de que tal coisa exis próprio Voltaire, tipicamente solar, inclina-se para um argumento informal por um pr

Voltaire perdeu o ponto. A aposta de Pascal é curiosamente moderna, tanto que Vo
não conseguiu acompanhá-la. Voltaire está certo numa coisa: ao contrário de Witzt
dos interpretadores de códigos da Bíblia, ou de Arbuthnot, ou dos advogados contem
neos do projeto inteligente, Pascal não está oferecendo nenhuma *evidência* da existên
Deus. Ele na verdade está propondo uma razão para acreditar, mas a razão tem a ver c
utilidade de acreditar, não com a justificativa de acreditar. De certa forma, ele antec
austera postura de Neyman e Pearson que vimos no Capítulo 9. Assim como eles, Pasc
cético em relação à possibilidade de que a evidência que encontramos forneça um
confiável de determinar o que é verdade. Não obstante, não temos outra escolha alé
decidir o que *fazer.* Pascal não está tentando convencer você de que Deus existe, ele
convencer você de que seria proveitoso acreditar nisso, e que o melhor curso é se apeg
cristianismo e obedecer às regras da piedade, até que, pela simples força da afinidade
comece a acreditar verdadeiramente. Posso reformular o argumento de Pascal em te
modernos melhor que David Foster Wallace fez em *Graça infinita*? Não, não posso.

> Os desesperados, recém-sóbrios Abstêmios, são sempre encorajados a invocar e divulgar slogans que eles ain
> entendem e em que nem acreditam – por exemplo, "Vá com calma!" e "Deixe quieto!" e "Um dia de cada vez!".
> chama "Vai levando até dar certo", que por si só é um slogan invocado com frequência. Todo mundo num Compr
> que se levanta publicamente para falar começa dizendo que é alcoólatra, e diz isso acreditando ou não; aí todo
> presente diz como está Grato por estar sóbrio e como é bacana ser Ativo e participar de um Compromisso co
> Grupo, mesmo que não esteja grato nem contente com nada. Você é encorajado a continuar dizendo coisas de
> até que começa a acreditar nelas, assim como se você perguntar a alguém que já está sóbrio há um bom tempo
> tempo vai ter de ficar arrastando todas essas malditas reuniões, e ele vai dar aquele sorriso irritante e lhe dizer
> você começar a *querer* ir a todas essas malditas reuniões.

## S. Petersburgo e Ellsberg

Os Utis são úteis quando é preciso tomar decisões em relação a itens que não tenhar
valor em dólares bem definido, como tempo perdido ou lanches desagradáveis. M
possível que você necessite falar de utilidade ao lidar com itens que *tenham* um valor
definido em dólares – como dólares.

Essa percepção logo chegou no desenvolvimento da teoria da probabilidade. C
muitas ideias importantes, ela entrou na conversa na forma de um quebra-cabeça. D
Bernoulli tem fama de haver descrito o enigma em seu artigo "Exposição sobre uma
teoria da medida de risco", de 1738.

> Peter lança uma moeda e continua a lançar até que dê "cara" quando ela cair no chão. Ele concorda em dar a P
> ducado se tirar "cara" logo no primeiro lançamento, dois ducados se tirar no segundo, quatro no terceiro, oito no
> e assim por diante, de modo que a cada lançamento adicional a quantia de ducados a ser paga é duplicada.

Esse é um cenário bem atraente para Paul, um jogo cujo cacife de entrada ele deve
disposto a pagar. Mas quanto? A resposta natural, depois da nossa experiência co
loterias, é computar o valor esperado da quantia que Paul recebe de Peter. Há uma ch
de 50/50 de que o primeiro lançamento da moeda dê cara, e nesse caso Paul recebe a
um ducado. Se o primeiro lançamento der coroa e o segundo cara, evento que ocorre

vezes, Paul ganha dois ducados. Para ganhar quatro, os primeiros três lançamentos pre
ser coroa, coroa, cara, o que acontece com probabilidade de ⅛. Seguindo adiante e fa
a soma, o lucro esperado de Paul é

$$\left(\frac{1}{2}\right)\times 1+\left(\frac{1}{4}\right)\times 2+\left(\frac{1}{8}\right)\times 4+\left(\frac{1}{16}\right)\times 8+\left(\frac{1}{32}\right)\times 16+\ldots$$

ou

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Essa soma não é um número. Ela é *divergente*. Quanto mais termos você adicionar,
fica a soma, crescendo ilimitadamente e atravessando qualquer fronteira finita.[c] Isso p
sugerir que Paul deveria estar disposto a gastar *qualquer* quantia de ducados pelo dire
participar do jogo.

Isso parece muito doido! E é! Contudo, quando a matemática nos diz que alguma
parece muito doida, os matemáticos não se contentam em dar de ombros e ir em
Saímos à caça da esquisitice seguindo o rastro à procura do lugar onde a matemátic
nossa intuição saiu dos trilhos. O enigma, conhecido como paradoxo de S. Petersbur
concebido por Nicolas Bernoulli, primo de Daniel, uns trinta anos antes. Muito
probabilistas da época tinham quebrado a cabeça pensando nele sem chegar a nen
conclusão satisfatória. A bela resolução do paradoxo do Bernoulli mais jovem é um resu
que se tornou marco de referência, e desde então constituiu o alicerce do pensar
econômico sobre valores incertos.

O erro, disse Bernoulli, é dizer que um ducado é um ducado é um ducado. Um d
na mão de um homem rico não vale a mesma coisa que um ducado na mão de um camp
como se observa facilmente pelos diferentes níveis de cuidado com que eles trat
dinheiro. Em particular, ter 2 mil ducados não é duas vezes tão bom quanto ter mil du
é menos que o dobro de bom, porque mil ducados valem menos na mão de uma pesso
já tem mil ducados que para uma pessoa que não tem nada. O dobro de ducados n
traduz no dobro de Utis; nem todas as curvas são retas, e a relação entre dinheiro e util
é governada por uma daquelas curvas não lineares.




Bernoulli achava que a utilidade crescia como o logaritmo, de modo que o prêm

mais ou menos o número de dígitos: então, em termos de dólar, a teoria de Bernoull dizendo que gente rica mede o valor da sua pilha de dinheiro pelo número de dígitos d do cifrão – um bilionário é tão mais rico que um centomilionário quanto um centomilio é mais rico que um decamilionário.

Na formulação de Bernoulli, a utilidade esperada do jogo de S. Petersburgo é a son

$$\left(\frac{1}{2}\right)\times 1+\left(\frac{1}{4}\right)\times 2+\left(\frac{1}{8}\right)\times 3+\left(\frac{1}{16}\right)\times 4+\ldots$$

Isso doma o paradoxo. Essa soma, como se descobre, não é mais infinita, nem m muito grande. Na verdade, há um lindo truque que nos permite calculá-la com exatid

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{32}+\ldots=\frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots=2$$

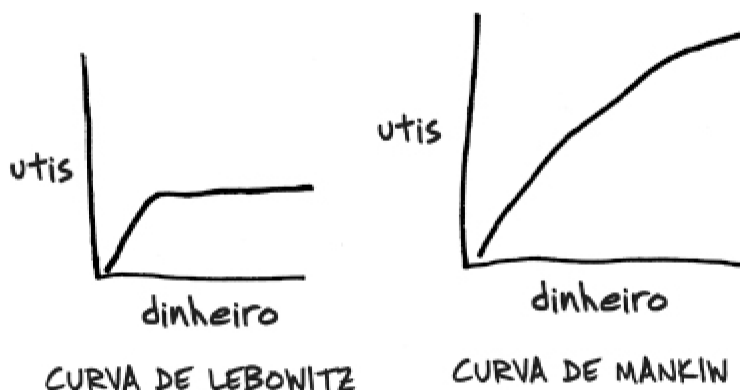
A soma da primeira linha, (½) + (¼) + (⅛) + …, é 1; é a própria série infinita que encontrou no Capítulo 2. A segunda linha é igual à primeira, mas com cada parcela div por 2; então sua soma deve ser metade da soma da primeira linha, ou ½. Pelo m raciocínio, a terceira linha, que é igual à segunda com cada termo dividido pela m deve ser a metade da soma da segunda linha; logo, ¼. Agora, a soma de *todos* os núm resultantes é 1 + ½ + ¼ + ⅛ + …; um a mais que a soma de Zeno, ou que vale dizer 2.

E se somarmos primeiro as colunas em vez das linhas? Como aconteceu com os fur equipamento estéreo dos meus pais, não pode fazer diferença se começamos a contar ve ou horizontalmente. A soma é o que é.[d] Na primeira coluna há somente um ½; na seg há duas cópias de ¼, perfazendo (¼) × 2; na terceira, três cópias de ⅛, perfazendo (⅛ e assim por diante. A série formada pela soma das colunas nada mais é que o esquer soma de Bernoulli para o estudo do problema de S. Petersburgo. Sua soma é a soma de os números do triângulo infinito, o que vale dizer 2. Então, a quantia que Paul deve pa a quantidade de ducados que sua curva de utilidade pessoal lhe disser que valem 2 Ut

A forma da curva de utilidade, além do simples fato de tender a curvar-se para ba medida que o dinheiro aumenta, é impossível de determinar precisamente,[f] embora e mistas e psicólogos contemporâneos estejam constantemente divisando experimentos vez mais intrincados para refinar nossa compreensão das suas propriedades. ("Agora, s se importa, acomode confortavelmente sua cabeça no centro do equipamento de resson magnética, e eu vou lhe pedir que ordene as seguintes seis estratégias de pôquer, da atraente para a menos atraente, e, depois disso, se você não se importar de perma quieto enquanto meu assistente pós-doutorando pincela uma amostra da sua bochech

Sabemos pelo menos que não existe curva universal. Pessoas diferentes em cont diferentes atribuem utilidades diferentes ao dinheiro. Esse fato é importante. Ele nos porciona uma pausa, ou deveria proporcionar, quando começamos a fazer generaliz sobre comportamento econômico. Greg Mankiw, o economista de Harvard que vimo última vez no Capítulo 1 elogiando debilmente a economia do governo Reagan, esc um post num blog de ampla circulação,[6] em 2008, explicando que o aumento de impo renda proposto pela equipe do candidato presidencial Barack Obama o levaria a relax trabalho. Afinal, Mankiw já estava num equilíbrio em que a utilidade dos dólare receberia por mais uma hora de trabalho seria cancelada exatamente pela utilidade ne imposta pela perda de uma hora com seus filhos. Diminua o número de dólares que Ma ganha por hora, e o ofício deixa de valer a pena; ele reduz o tempo de trabalho até c volta no nível em que uma hora com os filhos vale a mesma coisa para ele que uma trabalhando para obter seu pagamento reduzido por Obama. Ele concorda com o pon vista de Reagan sobre a economia da forma que é vista por um astro de cinema, qua alíquota de imposto sobre você produz menos filmes de caubói.

Mas nem todo mundo é Greg Mankiw. Em particular, nem todo mundo tem a m curva de utilidade que ele. A humorista Fran Lebowitz conta uma história sobr juventude em Manhattan dirigindo um táxi.[7] Ela começava a guiar no começo do dirigia todo dia até ganhar dinheiro suficiente para pagar o aluguel e a comida. Aí p de dirigir e passava o resto do mês escrevendo. Para Fran Lebowitz, todo dinheiro aci certo limiar contribui essencialmente com zero utilidade adicional. Ela tem uma cur aspecto diferente da de Mankiw. A dela fica horizontal depois que o aluguel é pago. acontece se o imposto de renda de Fran Lebowitz aumentar? Ela vai trabalhar *mais*, menos, para levar a si mesma de volta ao limiar.[g]



Bernoulli não foi o único matemático a chegar à ideia de utilidade e sua relaçã linear com o dinheiro. Ele foi precedido pelo menos por dois outros pesquisadores. U Gabriel Cramer, de Genebra; o outro foi um jovem correspondente de Cramer, nin menos que o lançador de agulhas Georges-Louis LeClerc, conde de Buffon. O intere Buffon em probabilidade não se restringia a jogos de salão. Mais tarde, ele se record seu encontro com o vexatório paradoxo de S. Petersburgo:

> Sonhei com esse problema algum tempo sem desatar o nó. Não conseguia ver que era possível fazer os matemáticos concordarem com o senso comum sem introduzir algumas considerações morais. E, tendo exp minhas ideias ao sr. Cramer, ele me disse que eu estava certo, e que ele também resolvera a questão com abo similar.[8]

A conclusão de Buffon espelhava a de Bernoulli, e ele percebeu a não linearidad especial clareza:

> O dinheiro não deve ser estimado pela sua quantidade numérica: se o metal, que é meramente um sinal de fosse a riqueza em si, ou seja, se a felicidade ou os benefícios que resultam da riqueza fossem proporcionais à qua de dinheiro, os homens teriam razão de calculá-la numericamente pela sua quantidade, porém, não cheg necessário que os benefícios que derivam do dinheiro estejam em proporção exata com sua quantidade. Um rico, com renda de 100 mil *écus* não é dez vezes mais feliz que o homem que tem apenas 10 mil *écus*. Há mais naquilo que o dinheiro é, e, logo que se ultrapassam certos limites, ele quase não tem valor real, e não pode au o bem-estar de seu possuidor. Um homem que descobrisse uma montanha de ouro não seria mais rico que aqu descobrisse apenas uma braça cúbica.[h]

A doutrina da utilidade esperada é atraente, porque simples e direta. Se lhe aprese um conjunto de alternativas, escolha aquela com a maior utilidade esperada. Talvez coisa mais próxima que temos de uma teoria matemática simples da tomada individ decisão. Ela capta muitas características do modo como os seres humanos fazem esc e é por isso que se mantém como parte do kit de ferramentas quantitativas do cie social. Pierre-Simon Laplace, na última página de seu tratado *Ensaio filosófico so probabilidades*, de 1814, escreve: "Vemos, neste ensaio, que a teoria das probabilida afinal, apenas o senso comum reduzido a 'cálculo'; ela aponta de forma precisa o mentes racionais entendem por meio de uma espécie de instinto, sem necessariament cônscias dela. E não deixa margem para dúvida, na escolha de opiniões e decisões; pe uso, pode-se sempre determinar a escolha mais vantajosa."

Mais uma vez, estamos vendo, a matemática é a extensão do senso comum por meios.

Mas a utilidade esperada não atinge tudo. Novamente, as complicações mais d entram na forma de um quebra-cabeça. Dessa vez, o responsável pela charada foi D Ellsberg, que mais tarde ficou famoso como o denunciante que vazou os document Pentágono para a imprensa civil. (Em círculos matemáticos, que às vezes podem se vincianos, não era incomum ouvir dizerem de Ellsberg: "Sabe, antes de se envolv política, ele fez alguns trabalhos realmente importantes.")

Em 1961, uma década antes de sua exposição ao público, Ellsberg era um jo brilhante analista na Corporação Rand, consultora do governo americano em qu estratégicas envolvendo guerra nuclear – como ela poderia ser evitada, ou, send

em economia em Harvard. Em ambos os caminhos, Ellsberg pensava profundamente
os processos pelos quais os seres humanos tomam decisões diante do desconhecid
época, a teoria da utilidade esperada tinha a posição suprema na análise matemáti
decisões. Von Neumann e Morgenstern,[i] em seu livro fundamental *The Theory of G
and Economic Behavior*, haviam provado que todas as pessoas que obedeciam a
conjunto de regras ou axiomas comportamentais *tinham* de agir como se suas esc
fossem governadas pelo impulso de maximizar alguma função de utilidade. Esses axi
– posteriormente refinados por Leonard Jimmie Savage, membro do Grupo de Pes
Estatística do tempo da guerra com Abraham Wald – eram o modelo-padrão de comp
mento sob incerteza da época.

A teoria dos jogos e a teoria da utilidade esperada ainda desempenham grande pap
estudo de negociações entre povos e Estados, mas não tanto quanto na Rand, no au
Guerra Fria, quando os escritos de Von Neumann e Morgenstern estavam sujeitos a
bíblicos de reverência e análise. Os pesquisadores da Rand estudavam algo fundam
para a vida humana: o processo de escolha e competição. Os jogos estudados, como a a
de Pascal, eram jogados com níveis de apostas muito elevados.

Ellsberg, o jovem superstar, tinha um gosto para frustrar expectativas estabele
Depois de se graduar em terceiro lugar em sua turma de Harvard,[9] havia surpreendido
camaradas intelectuais alistando-se no Corpo de Fuzileiros Navais, onde serviu po
anos na infantaria. Em 1959, como bolsista em Harvard, deu uma famosa palestra
estratégia em política exterior na Biblioteca Pública de Boston, na qual abordava a ef
de Adolf Hitler como tático em geopolítica: "Há o artista a ser estudado, para se apren
que se *pode* esperar, o que pode ser feito com a ameaça da violência."[10] (Ellsberg se
insistiu que não recomendara que os Estados Unidos adotassem estratégias ao esti
Hitler, só queria fazer um estudo desapaixonado de sua eficácia. Talvez isso seja ver
mas é difícil duvidar que ele não estivesse tentando amolar seu público.)

Assim, talvez não seja surpresa que Ellsberg não estivesse contente em aceitar os p
de vista predominantes. Na verdade, ele vinha cutucando as fundações da teoria dos
desde o trabalho final de graduação. Na Rand, concebeu um famoso experimento,
conhecido como paradoxo de Ellsberg.[11]

Suponha que haja uma urna[j] com noventa bolas dentro. Você sabe que trinta dela
vermelhas; com referência às outras sessenta, sabe apenas que algumas são pretas e alg
são amarelas. O experimentador descreve para você as seguintes quatro apostas:

Vermelha. Você ganha US$ 100 se a próxima bola a ser tirada da urna for vermel
não for, não ganha nada.

Preta. Você ganha US$ 100 se a próxima bola for preta; se não for, não ganha nada

Não vermelha. Você ganha US$ 100 se a próxima bola for preta ou amarela; se nã
não ganha nada.

Não preta: Você ganha US$ 100 se a próxima bola for vermelha ou amarela; se nã
não ganha nada.

Que aposta você prefere, vermelha ou preta? E o que acha de não vermelha versu preta?

Ellsberg apresentava o problema aos participantes para ver qual dessas aposta preferiam, dada a escolha. O que descobriu foi que as pessoas pesquisadas tendiam a pr vermelha à preta. Com vermelha, você sabe onde está: tem uma chance em três de g o dinheiro. Com preta, você não tem ideia de que chances esperar. Quanto a não ver e não preta, a situação é exatamente a mesma: os sujeitos da pesquisa de Ellsberg gost mais de não vermelha, preferindo saber que sua chance de ganhar era exatamente $2/3$.

Agora suponha que você tenha uma escolha mais complicada. Você deve escolher das apostas, e não duas quaisquer: precisa escolher "vermelha e não vermelha" ou "p não preta". Se você prefere vermelha a preta e não vermelha a não preta, parece razoáv prefira "vermelha e não vermelha" a "preta e não preta".

Mas agora há um problema. Escolher vermelha e não vermelha é a mesma coisa qu a si mesmo US$ 100. Mas a mesma coisa acontece com preta e não preta! Como pode delas ser preferível à outra se as duas são *a mesma coisa*?

Para um proponente da teoria da utilidade esperada, os resultados de Ellsberg par muito estranhos. Cada aposta deve valer certo número de Utis, e se vermelha tem utilidade que preta, e não vermelha mais utilidade que não preta, deve igualmente oc que vermelha + não vermelha valha mais Utis que preta + não preta; mas as duas são i Se você quer acreditar em Utis, tem de acreditar que os participantes do estudo de Ell estão redondamente enganados em suas preferências; eles são ruins de cálculo, ou não prestando atenção cuidadosa na questão ou estão simplesmente loucos. Como as pes quem Ellsberg fez a pergunta eram de fato renomados economistas e teóricos de dec esta conclusão apresenta seus próprios problemas para o statu quo.

Para Ellsberg, a resposta do paradoxo é, simplesmente, que a teoria da utilidade esp é incorreta. Como Donald Rumsfeld diria depois, há desconhecidos conhecidos e há d nhecidos desconhecidos, e ambos devem ser processados de forma diferente. Os "desc cidos conhecidos" são como vermelha – não sabemos que bola vamos tirar, mas pod quantificar a probabilidade de que a bola seja da cor que queremos. Preta, por outro sujeita o jogador a um "desconhecido desconhecido" – não só não temos certeza de bola será preta, como não temos o menor conhecimento da probabilidade de que el preta. Na literatura sobre tomadas de decisão, o primeiro tipo de desconhecido é cha *risco*, o último, *incerteza*. Estratégias arriscadas podem ser analisadas numerican Estratégias incertas, sugeriu Ellsberg, estavam além dos limites da análise matemática fo ou pelo menos além dos limites do sabor da análise adorada na Rand.

Nada disso é para negar a incrível utilidade da teoria da utilidade. Há muitas situaç e a loteria é uma delas – em que o mistério ao qual estamos sujeitos é todo ele governado por probabilidades bem-definidas; e há muito mais circunstâncias em que conhecidos desconhecidos" estão presentes, mas desempenham apenas um pequeno Vemos aqui o puxa e empurra característico da abordagem matemática da ciência. máticos como Bernoulli e Von Neumann constroem formalismos que lançam uma trante luz sobre a esfera de inquirição antes compreendida apenas de maneira t

Cientistas matematicamente fluentes como Ellsberg trabalham para entender os li desses formalismos, para aprimorá-los e melhorá-los onde for possível e colocar avis alerta incisivamente redigidos onde não for.

O artigo de Ellsberg é escrito num estilo literário vívido, pouco característico da ecor técnica. No parágrafo de conclusão, ele escreve, a respeito dos sujeitos do seu experin que "a abordagem bayesiana ou de Savage fornece predições erradas, e, à luz delas, un conselho. Elas agem deliberadamente em conflito com os axiomas, sem dar satisfa porque lhes parece a maneira sensata de se comportar. Estarão elas claramente engana

No mundo de Washington e da Rand na época da Guerra Fria, a teoria das decisõ teoria dos jogos eram tidas na mais alta estima intelectual, vistas como as ferram científicas que poderiam vencer a próxima guerra mundial, como a bomba atômica ga a anterior. O fato de que essas ferramentas pudessem ser limitadas em sua aplic especialmente em contextos para os quais não havia precedentes, e, portanto, nenhum de estimar probabilidades – como, digamos, *a redução instantânea da raça humana à p radiativa* –, deve te sido ao menos um pouquinho problemático para Ellsberg. Teria aqui, numa discordância sobre matemática, que realmente começaram as dúvidas de relação ao establishment militar?

---

[a] Essa unidade não é um consenso universal. No Brasil, há o Índice de Utilidade Pública, o Util. (N.T.)

[b] Embora eu tenha ouvido pelo menos um economista argumentar que uma certa quantidade de felicidade futu menos que a mesma quantidade de felicidade agora, o valor do júbilo eterno no colo de Abraão é na verdade finito

[c] No entanto, lembre-se de que, como vimos no Capítulo 2, séries divergentes não são simplesmente aquelas que para o infinito. Elas também incluem aquelas que se recusam a se estabilizar de outras maneiras, como a série de 1 − 1 + 1 − 1 + …

[d] Alerta: há grandes perigos à espera quando se usa esse tipo de argumento intuitivo com somas infinitas. Ele dá c presente caso, mas barbaramente errado para somas infinitas mais enroladas, em especial com termos positivos e ne

[e] Embora, conforme mostrou Karl Menger – orientador de Abraham Wald no doutorado – em 1934, haja varia jogo de S. Petersburgo tão generosas que até os jogadores logarítmicos de Bernoulli estariam propensos a pag quantia arbitrária de ducados para jogar. E se o prêmio de ordem *k* for $2^{2^\wedge k}$ ducados?

[f] De fato, a maioria das pessoas diria que a curva de utilidade nem sequer *existe* literalmente como tal – ela c pensada como uma diretriz relaxada, e não como uma coisa real, de formato preciso, que nós não medimos com ex

[g] Lebowitz escreveu em seu livro *Social Studies*: "Fique firme na sua recusa de permanecer consciente durante a a Eu lhe asseguro que não existe essa coisa, a álgebra." Eu afirmo que esse exemplo mostra que há matemática na Lebowitz, quer se refira a ela, quer não!

[h] Uma braça corresponde, mais ou menos, a 1,8 metro. (N.T.)

[i] O mesmo Oskar Morgenstern que tirou Abraham Wald da matemática pura e finalmente da Áustria ocupada.

[j] Eu nunca vi uma urna dessas, mas é uma espécie de lei férrea da teoria da probabilidade que, se for necessário bolas coloridas, é uma urna que deve contê-las.

# 13. Onde os trilhos do trem se encontram

A NOÇÃO DE UTILIDADE ajuda a dar sentido a um traço intrigante da história do Cash Wi
Quando o grupo de apostas de Gerald Selbee chegou com maciças quantidades de bil
eles usaram Quick Pik, deixando que os computadores da loteria escolhessem aleatoria
os números nos volantes. A Random Strategies, por outro lado, fazia questão de esc
seus números. Isso significava que precisavam preencher centenas de milhares de vo
à mão, depois alimentar as máquinas com eles, um a um, nas lotéricas escolhidas,
hercúlea e incrivelmente monótona.

Os números vencedores são completamente aleatórios, cada bilhete de loteria
mesmo valor esperado; os 100 mil do Quick Pik de Selbee introduziam a mesma quan
prêmio em dinheiro, em média, que os bilhetes artesanalmente marcados de Harvey
No que diz respeito ao valor esperado, a Random Strategies fazia um bocado de se
pesado sem qualquer compensação. Por quê?

Considere esse caso, mais simples, porém da mesma natureza. Você preferiria ter U
mil nas mãos ou fazer uma aposta 50/50 entre perder US$ 100 mil e ganhar US$ 20
O valor esperado dessa aposta é

$$\left(\frac{1}{2}\right) \times (-\$\ 100 \text{ mil}) + \frac{1}{2} \times (\$\ 200 \text{ mil}) = \$\ 50 \text{ mil},$$

ou seja, a mesma quantia. De fato, há motivo para se sentir indiferente entre as duas esc
Se você fizesse a aposta vezes e vezes seguidas, quase certamente ganharia US$ 200 r
metade das vezes, e perderia US$ 100 mil na outra metade. Imagine que você alter
entre ganhar e perder. Após duas apostas, você teria ganhado US$ 200 mil e perdid
100 mil, obtendo um ganho líquido de US$ 100 mil. Após quatro apostas você já ten
200 mil; após seis apostas, US$ 300 mil; e assim por diante. Isso é um lucro de US$ 5
por aposta, em média, a mesma coisa que você ganharia se tivesse ido pelo caminho se

Mas agora finja por um momento que você não é um personagem num problema te
de um livro de economia, e sim uma pessoa real – uma pessoa real que não tem US
mil em dinheiro na mão. Quando você perde aquela primeira aposta, e o seu ager
apostas – o seu enorme, irado, careca e musculoso agente de apostas – vem rece
dinheiro, será que você diz "Um cálculo de valor esperado mostra que é muito prováv
eu consiga lhe devolver o dinheiro a longo prazo"? Você não diz isso. Esse argun
embora sólido matematicamente, não atingirá o objetivo.

Se você é uma pessoa real, deve pegar os US$ 50 mil.

Esse raciocínio é bem captado pela teoria da utilidade. Se eu sou uma corporaçãc fundos ilimitados, perder US$ 100 mil pode não ser tão ruim – digamos, vale −100 U enquanto ganhar US$ 200 mil me traz 200 Utis. Nesse caso, dólares e Utis se encaixa maneira bastante linear; um Util é simplesmente outro nome para a nota de mil.

Mas se eu sou uma pessoa real com magras economias, o cálculo é bem diferente. G US$ 200 mil mudaria a minha vida mais do que a da corporação, então, talvez valha para mim – digamos, 400 Utis. Mas perder US$ 100 mil não só raspa minha conta ban como me põe nas garras do agente irado, careca e musculoso. Esse não é só um dia para a folha de pagamentos, é um sério risco de contusão. Talvez o avaliemos em – Utis. Nesse caso, a utilidade esperada da aposta é:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\times(-1.000)+\frac{1}{2}\times(400)=-300$$

A utilidade negativa dessa aposta significa que ela não só é pior que os US$ 5 garantidos, como *é pior que não fazer nada*. Uma chance de 50% de ficar totalmente c um risco que você não pode se permitir, pelo menos sem a promessa de uma recom muito maior.

Essa é uma maneira matemática de formalizar um princípio que você já conhece: q mais rico você é, mais pode se dar ao luxo de correr riscos. Apostas como essa aí são investimentos arriscados em ações com um retorno esperado positivo em dólares. Se fizer uma porção desses investimentos, às vezes pode perder um punhado de dinhei uma tacada, mas a longo prazo vai sair no lucro. A pessoa rica, que tem reservas sufic para absorver essas perdas ocasionais, investe e fica mais rica. A pessoa não ric exatamente onde está.

Um investimento de risco pode fazer sentido mesmo que você não tenha dinheirc cobrir suas perdas, contanto que tenha um plano alternativo. Certa jogada de mercado vir com 99% de chance de ganhar US$ 1 milhão e 1% de chance de perder US$ 50 mi Você deve fazer a jogada? Ela tem um valor esperado positivo, então parece um estratégia. Mas você pode vacilar ante o risco de absorver perda tão grande, em es porque é dificílimo ter alguma certeza sobre pequenas probabilidades.[a] Os profissi chamam jogadas desse tipo de "catar centavos na frente de um rolo compressor" – a parte do tempo, você ganha um pouco de dinheiro, mas um pequeno deslize deixa esborrachado.

Então, o que você faz? Uma estratégia é se alavancar até a cabeça, até ter ativos em suficientes para fazer a jogada de risco, mas multiplicada por um fator de cem. Agora tem probabilidade de ganhar US$ 100 milhões numa transação. Ótimo! E se o rolo pressor pegar você? Você perde US$ 5 bilhões. Só que não perde, porque a ecor mundial, nesses nossos tempos interconectados, é uma casa de árvore grande e frágil, por cordas e pregos enferrujados. Um colapso épico de uma parte da estrutura traz o risco de derrubar a casa inteira. O Federal Reserve – o banco central americano – ten forte disposição para não deixar isso acontecer. Como diz o velho ditado, se você perc $ 1 milhão, o problema é seu; se perde US$ 5 bilhões, o problema é do governo.

Essa estratégia financeira é cínica, mas com frequência funciona. Funcionou para a l Term Capital Management,[1] na década de 1990, tal como narrado no soberbo livro de l Lowenstein, *When Genius Failed*, e funcionou para as firmas que sobreviveram e até luc com o colapso financeiro de 2008. Na ausência de mudanças fundamentais, que par não estar à vista, irá funcionar novamente.[b]

Firmas financeiras não são seres humanos, e a maioria dos homens, mesmo os rico gosta de incerteza. O investidor rico pode alegremente fazer a aposta 50-50 com esperado de US$ 50 mil, mas provavelmente preferiria pegar logo os US$ 50 mil. O t relevante da arte é *variância*, uma medida da amplitude em que estão dispersos os pos resultados de uma decisão, e qual a probabilidade de encontrar os extremos de qualqu dos lados. Entre apostas com o mesmo valor esperado em dinheiro, a maioria das pe em particular pessoas sem ativos líquidos ilimitados, prefere aquela com menor vari É por isso que algumas investem em letras de câmbio municipais, mesmo que as ofereçam taxas de retorno mais altas a longo prazo. Com letras de câmbio, você *tem c* de que vai receber seu dinheiro. Invista em ações, com sua variância maior, e você p velmente se dará melhor, porém, pode terminar muito pior.

Lutar com a variância é um dos principais desafios de administrar o dinheiro, que conheça isso ou não. É por causa da variância que os fundos de pensão diversifican investimentos de capital. Se você tem todo seu dinheiro em ações de gás e petróleo, u choque grande no setor de energia pode torrar toda sua carteira de investimentos. Se tem metade em gás e metade em tecnologia, uma grande alteração numa leva de açõe precisa necessariamente ser acompanhada por qualquer movimento das outras, porqu é uma carteira de variância mais baixa. Você quer ter os ovos em cestas diferentes, *montão* de cestas diferentes. É exatamente isso que você faz quando põe suas econ num gigantesco fundo indexado, que distribui seus investimentos por toda a econom livros de autoajuda financeira com boa mentalidade matemática, como *A Random Down Wall Street*, gostam muito dessa estratégia. Ela é tediosa, mas funciona. *Se o pla mento da aposentadoria é empolgante…*

Ações, pelo menos a longo prazo, tendem a ficar mais valiosas em média. Inves mercado de ações, em outras palavras, é uma jogada com valor esperado positivo. apostas que tenham valor esperado *negativo*, o cálculo oscila. As pessoas detestam a certa assim como adoram o ganho certo. Então, você procura uma variância maio menor. Você não vê gente na roleta pondo uma ficha em cada número. Esse é apena jeito desnecessariamente elaborado de entregar as fichas para a banca.

O que tudo isso tem a ver com o Cash WinFall? Como dissemos no começo, o esperado em dinheiro de 100 mil bilhetes de loteria é o que é, não importa quantos bi você compre. Mas a variância é outra história. Suponha, por exemplo, que eu resolva e no jogo de apostas de grande volume, mas tenha uma abordagem diferente: compro 1( cópias do mesmo resultado.

Se os meus bilhetes acertarem quatro de seis números no sorteio da loteria, então s felizardo dono de 100 mil bilhetes que fizeram a quadra, e vou pegar todo o prêmio d 1,4 milhão, com um belo lucro de 600%. Mas se meu conjunto de números for perc

perco todo o meu monte de US$ 200 mil. Essa é uma aposta de alta variância, com g
chance de uma perda grande e pequena chance de um ganho ainda maior.

Assim, “Não ponha todo seu dinheiro em um número” é um conselho bastante bo
muito melhor espalhar suas apostas. Mas não era exatamente isso que a gangue de S
estava fazendo ao usar a máquina de Quick Pik, que escolhe os números ao acaso?

Não exatamente. Em primeiro lugar, ainda que Selbee não estivesse pondo tod
dinheiro em um bilhete, ele estava comprando, *sim*, a mesma numeração múltiplas
No começo isso parece estranho. No máximo da sua atividade, ele estava comprand
mil bilhetes por sorteio, deixando o computador escolher os números ao acaso entre
10 milhões de alternativas. Suas compram perfaziam meros 3% dos resultados pos
Quais as chances de ele comprar a mesma numeração duas vezes?

Na verdade, as chances são realmente boas. Do fundo do baú: aposte com os convi
de uma festa que duas pessoas na sala têm o mesmo dia de aniversário. É melhor se
festa grande – digamos que haja trinta pessoas. Trinta aniversários em 365 opções[c]
muita coisa, e você poderia pensar que é bem pouco provável que dois deles caia
mesmo dia. Mas a grandeza relevante não é o número de pessoas, mas o número de
de pessoas. Não é difícil verificar que há 435 pares de pessoas,[d] e cada par tem uma c
em 365 de compartilhar o aniversário. Logo, numa festa desse tamanho, seria de es
que haja um par compartilhando o aniversário, ou talvez até dois pares. Na verdade, a c
de duas pessoas entre trinta fazerem aniversário no mesmo dia é um pouco mais de 7
uma chance bastante boa. Se você compra 300 mil bilhetes de loteria escolhidos ao
em 10 milhões de opções, a chance de sair uma numeração repetida é tão perto de u
eu prefiro dizer “é certeza” que calcular quantos algarismos 9 a mais eu vou precisar d
de “99,9%” para especificar a probabilidade exata.

Não são só os bilhetes repetidos que geram problemas. Como sempre, pode ser mai
ver o que está se passando com a matemática se tornarmos os números pequenos o ba
para poder desenhar figuras. Vamos simular um sorteio de loteria com apenas sete
das quais o Estado pega três como combinação para o prêmio. Há 35 conjuntos de prê
correspondentes às 35 maneiras diferentes de três números serem escolhidos do con
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. (Os matemáticos gostam de dizer, abreviando, “combinação de 7 3
35”.) Aqui estão eles, em ordem numérica:

123 124 125 126 127
134 135 136 137
145 146 147
156 157
167
234 235 236 237
245 246 247
256 257
267

356 357
367
456 457
467
567

Digamos que Gerald Selbee vá a uma lotérica e use Quick Pik para comprar sete bi
ao acaso. Sua chance de ganhar o prêmio continua bastante pequena. No entanto,
loteria, você também ganha um prêmio se acertar dois dos três números. (Essa estr
lotérica particular é às vezes chamada de "loteria da Transilvânia", mas não consegui e
trar nenhuma evidência de que tal jogo tenha algum dia sido jogado na Transilvânia
por vampiros.)

Dois em três é um jeito fácil de ganhar. Então, para eu não ter de ficar repetindo
em três", vamos chamar um bilhete que ganha esse prêmio menor de *duque*. Se o sorte
1, 4 e 7, por exemplo, os quatro bilhetes com 1, 4 e algum outro número *diferente* de
todos duques. Além desses quatro, há quatro bilhetes que acertam 1-7 e quatro que ac
4-7. Logo, doze em 35, um pouquinho mais de ⅓ das combinações possíveis, são duq
que sugere haver pelo menos um par de duques entre os sete bilhetes de Gerald Selbee
ser preciso, você pode calcular que Selbee tem

5,3% de chance de não ter nenhum duque.
19,3% de chance de exatamente um duque.
30,3% de chance de dois duques.
26,3% de chance de três duques.
13,7% de chance de quatro duques.
4,3% de chance de cinco duques.
0,7% de chance de seis duques.
0,1% de chance de todos os sete bilhetes serem duques.

O número esperado de duques é, portanto:

5,3% × 0 + 19,3% × 1 + 30,3% × 2 + 26,3% × 3 + 13,7% × 4 + 4,3% × 5 + 0,7% × 6 -
0,1% × 7 = 2,4

A versão da Transilvânia de James Harvey, por outro lado, não usa Quick Pi
preenche seus sete bilhetes à mão, e aí vão eles:

124
135
167
257

236
456

Suponha que a loteria sorteie 1, 3 e 7. Então Harvey tem três duques na mão: 135, 347. E se a loteria sortear 3, 5, 6? Então Harvey, mais uma vez, tem três duques entr bilhetes, com 135, 236 e 456. Continue tentando combinações possíveis, e logo voc que as escolhas de Harvey têm uma propriedade muito especial: ou ele ganha o g prêmio ou ganha *exatamente* três duques. A chance de o grande prêmio ser um do bilhetes de Harvey é de sete em 35, ou 20%. Então ele tem:

20% de chance de não ter nenhum duque.
80% de chance de ter três duques.

Seu número esperado de duques é

$20\% \times 0 + 80\% \times 3 = 2{,}4$

exatamente o mesmo de Selbee, como devia ser. Mas a variância é muito menor. Harve uma incerteza muito pequena acerca de quantos duques vai tirar. Isso torna a carte Harvey bem mais atraente para potenciais membros de um cartel. Note especialn sempre que Harvey não tira três duques, ele tira o grande prêmio. Isso significa estratégia de Harvey *garante* um retorno mínimo substancial, algo que os usuários de Pik, como Selbee, nunca podem garantir. Você mesmo escolher os números pode faze que se livre do seu risco mantendo a recompensa, se escolher os números direito.

E como escolher os números direito? Essa é – literalmente, dessa vez! – a pergunta $ 1 milhão.

Primeira tentativa: simplesmente peça ao computador para fazê-lo. Harvey e sua e eram alunos do MIT, presumivelmente capazes de sacar algumas dúzias de linhas d programa antes do café da manhã. Por que simplesmente não escrever um program rodar por todas as combinações dos 300 mil bilhetes de WinFall para ver qual ofer estratégia de menor variância?

Esse não seria um programa difícil de escrever. O único probleminha seria a forma toda a matéria e energia do Universo decairiam em morte térmica quando seu prog tivesse manipulado o primeiro fragmento minúsculo de uma microlasca dos dado estivesse tentando analisar. Do ponto de vista de um computador moderno, 300 mil um número muito grande. Mas os objetos que o programa proposto precisa vasculha são os 300 mil bilhetes, são os possíveis conjuntos de 300 mil bilhetes a serem adqu entre os 10 milhões de bilhetes possíveis do Cash WinFall. Quantos desses conj existem? Mais de 300 mil. Mais que o número de partículas subatômicas que existem existiram. Muito mais. Você provavelmente nunca *ouviu* falar num número tão gran maneiras de escolher seus 300 mil bilhetes.[e]

Estamos nos defrontando aqui com o temido fenômeno conhecido pelos carinh

muito simples podem transformar números grandes manipuláveis em números abs mente impossíveis. Se você quer saber qual dos cinquenta estados americanos é o lugar vantajoso para instalar seu negócio, é fácil. Basta comparar cinquenta coisas diferentes se você quer saber qual *rota*, através dos cinquenta estados, é mais eficiente – o cha problema do caixeiro-viajante –, a explosão combinatória é detonada, e você depara uma dificuldade de uma escala totalmente diferente. Há cerca de 30 vintilhões de r escolher. Em termos mais familiares, são 30 mil trilhões de trilhões de trilhões de tri de trilhões.

Bum!

Então, é melhor que haja outro jeito de escolher nossos bilhetes de loteria para an a variância. Você acreditaria se eu lhe dissesse que tudo se reduz à geometria plana?

## Onde os trilhos do trem se encontram

Retas paralelas não se encontram. É isso que as torna paralelas.

Mas retas paralelas às vezes *parecem* se encontrar. Pense num par de trilhos de sozinhos numa paisagem vazia. Os dois trilhos parecem convergir à medida que seus os acompanham aproximando-se mais e mais do horizonte. (Eu acho que ajuda ter música country tocando, se você realmente quer ter uma imagem mental vívida diss Esse é o fenômeno da *perspectiva*. Quando você tenta retratar o mundo tridimensior seu campo de visão bidimensional, é preciso abdicar de algo.

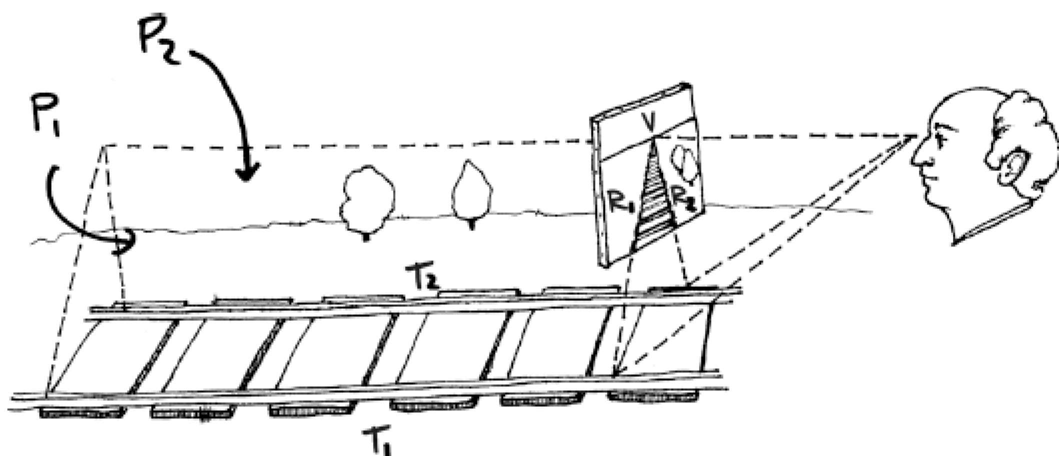
As pessoas que primeiro descobriram o que acontece aqui foram aquelas que precis entender ao mesmo tempo como as coisas são e como parecem, e a diferença entre a ou seja, os pintores. O momento, no início do Renascimento italiano, no qual os pir entenderam a perspectiva foi aquele em que as coisas mudaram para sempre; o instan que as pinturas europeias deixaram de parecer os desenhos de seus filhos pregados na da geladeira (isso se seus filhos desenharam principalmente Jesus morto na cruz) e c çaram a parecer as coisas que eram pintadas.[f]

Como exatamente artistas como Filippo Brunelleschi vieram a desenvolver a mo teoria da perspectiva é uma pergunta que tem ocasionado centenas de brigas entre his dores da arte, não vamos entrar nisso. O que sabemos com certeza é que a descoberta ju preocupações estéticas a novas ideias da matemática e da ótica. Um ponto central compreensão de que as imagens que vemos são produzidas por raios de luz que inc sobre os objetos e nele se refletem, e depois atingem nosso olho. Isso soa óbvio para o o moderno, mas, acredite, não era óbvio na época. Muitos dos cientistas antigos, mais riamente Platão, argumentavam que a visão devia envolver algum tipo de fogo que em do olho. Essa perspectiva retrocede pelo menos até Alcméon de Crotona, um dos esqui pitagóricos que conhecemos no Capítulo 2. O olho devia gerar luz,[2] argumentava Alcr que outra fonte poderia haver para o *fosfeno*, as estrelinhas que você vê quando fec olhos e pressiona o globo ocular?

A teoria da visão por raios refletidos foi elaborada em grande detalhe pelo maten

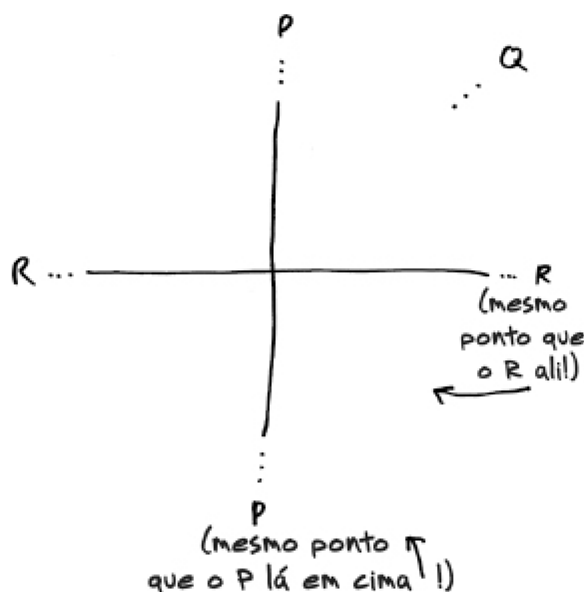
como faz a maioria dos autores ocidentais). Seu tratado sobre ótica, *Kitab al-Manaz* traduzido para o latim e avidamente devorado por filósofos e artistas em busca de compreensão mais sistemática da relação entre a visão e a coisa vista. A questão princ a seguinte: um ponto P na sua tela representa uma *reta* no espaço tridimensional. Gr Euclides, sabemos que há uma única reta contendo quaisquer dois pontos específicos. caso, a reta é aquela que contém P e seu olho. Qualquer objeto no mundo que esteja reta é pintado no ponto P.

Agora imagine que você é Filippo Brunelleschi parado na frente da pradaria plana, à sua frente, no cavalete, pintando os trilhos do trem.[g] A ferrovia consiste em dois tr que chamaremos de $T_1$ e $T_2$. Cada um desses trilhos, desenhado na tela, vai parecer reta. E exatamente como um ponto na tela corresponde a uma reta no espaço, uma re tela corresponde a um plano. O plano $P_1$ correspondente a $T_1$ é o plano varrido pelas ligando cada ponto do trilho ao seu olho. Em outras palavras, é um plano específic contém tanto seu olho quanto o trilho $T_1$. Da mesma maneira, o plano $P_2$ correspond $T_2$ é aquele que contém seu olho e $T_2$. Cada um dos dois planos corta a tela numa r chamamos essas retas de $R_1$ e $R_2$.




Os dois trilhos são paralelos. *Mas os dois planos não são*. Como poderiam ser? E encontram no seu olho, e planos paralelos não se encontram em nenhum lugar. Mas p que não são paralelos precisam se interceptar numa reta. Nesse caso, a reta é horiz emanando do seu olho e prosseguindo paralela aos trilhos do trem. A reta, sendo horiz não se encontra com a pradaria – ela se lança rumo ao horizonte, sem nunca tocar o Mas – e aqui está a questão – ela se encontra com a tela em algum ponto V. Como V es plano $P_1$, que contém $T_1$, deve estar na reta $R_1$, onde $P_1$ corta a tela. E como V está tar no plano $P_2$, que contém $T_2$, deve estar em $R_2$. Em outras palavras, V é o ponto na tela os trilhos do trem pintados se encontram. Na verdade, qualquer trajetória reta so pradaria que corra paralela aos trilhos da ferrovia será, sobre a tela, uma reta passand V. V é o chamado ponto de fuga pelo qual devem passar as pinturas de todas as paralelas aos trilhos. Na verdade, todo par de trilhos paralelos determina algum por fuga sobre a tela. A localização do ponto de fuga depende da direção para a qual as paralelas estão indo. (As únicas exceções são pares de retas paralelas à própria tela, co

A mudança conceitual que Brunelleschi fez aqui é o coração do que os matem chamam de geometria projetiva. Em vez de pontos na paisagem, pensamos em retas at do nosso olho. À primeira vista, a distinção poderia parecer puramente semântica. ponto no chão determina uma, e somente uma, reta entre o ponto e o nosso olho. En que importa se pensamos no ponto ou pensamos na reta? A diferença é simplesment há mais retas através do nosso olho do que pontos no chão, porque há as retas *horizo* que não intersectam o chão. Estas correspondem aos pontos de fuga na nossa tela, os lu onde os trilhos do trem se encontram. Você poderia pensar nessa reta como um pon chão "infinitamente distante" na direção dos trilhos. De fato, os matemáticos geralme chamam de *pontos no infinito*. Quando você pega o plano que Euclides conhecia e col pontos no infinito, você obtém o *plano projetivo*. Eis uma figura dele:




A maior parte do plano projetivo parece o plano achatado regular ao qual voc acostumado. Mas o plano projetivo tem mais pontos, os chamados pontos no infinit para cada direção possível ao longo do qual uma reta pode ser orientada no plano. deve pensar no ponto P, que corresponde à direção vertical, como infinitamente al longo do eixo vertical – mas também infinitamente *baixo* ao longo do eixo vertic plano projetivo, as duas extremidades do eixo y *se encontram* no ponto no infinito, e se revela não realmente uma reta, mas um círculo. Da mesma maneira, Q é o ponto qu infinitamente distante a nordeste (ou sudoeste!), e R é o ponto na extremidade d horizontal. Ou melhor, em *ambas* as extremidades. Se você viajar infinitamente para a d até chegar a R, e aí seguir viajando, vai se descobrir ainda viajando para a direita, s agora voltando para o centro a partir da margem esquerda da figura.

Essa coisa de "sair para um lado e voltar pelo outro" fascinou o jovem Winston Chu que se recordava vividamente de uma epifania matemática em sua vida:

> Certa vez tive uma sensação em relação à matemática, que eu via tudo – a profundidade além da profundidad revelada –, bismo e abismo. Eu vi, como se pode ver o movimento de Vênus – ou mesmo a parada de ani londrina, uma grandeza passando pelo infinito e mudando de sinal, de mais para menos. Vi exatamente como ac e por que a tergiversação era inevitável: e como um passo envolvia todos os outros. Era como a política. Mas foi

Na verdade, o ponto R não é só o ponto extremo do eixo horizontal, mas de *qua* reta horizontal. Se duas retas diferentes são ambas horizontais, elas são paralelas. To em geometria projetiva, elas se encontram, no ponto do infinito. Perguntaram a l Foster Wallace, numa entrevista de 1996, acerca do final de *Graça infinita*, que muita considerou abrupto. Teria ele, indagou o entrevistador, evitado escrever um final p "simplesmente se cansou de escrever"? Wallace respondeu, bastante irritado:

> Pelo que me concerne, há um final.[3] Supõe-se que certos tipos de retas paralelas comecem a convergir de tal mo o leitor possa projetar um "final" em algum lugar além da moldura direita. Se nenhuma convergência ou p dessas lhe ocorreu, então o livro falhou para você.

O PLANO PROJETIVO tem o defeito de ser difícil de desenhar, mas a vantagem de tor regras da geometria muito mais aprazíveis. No plano euclidiano, dois pontos dife determinam uma única reta, e duas retas diferentes determinam um único ponto de seção – a não ser que sejam paralelas, e nesse caso não se encontram. Em matem gostamos de regras e não gostamos de exceções. No plano projetivo, não é preciso exceções para a regra de que duas retas se encontram num ponto, porque retas par também se encontram. Quaisquer duas retas verticais, por exemplo, se encontram e quaisquer duas retas apontando para o nordeste ou sudoeste se encontram em Q. pontos determinam uma única reta, duas retas se encontram num único ponto. Fi papo.[h]

A geometria projetiva é perfeitamente simétrica e elegante, de um modo que a geon plana clássica não consegue ser. Não é coincidência o fato de que a geometria pro tenha surgido naturalmente a partir de tentativas de solucionar o problema práti retratar o mundo tridimensional numa tela plana. A elegância matemática e a util prática são companheiras íntimas, como tem mostrado repetidamente a história da ci Às vezes os cientistas descobrem a teoria e deixam para os matemáticos descobrir pc é elegante, e outras vezes os matemáticos desenvolvem uma teoria elegante e deixam os cientistas descobrir para que ela serve.

Uma coisa para a qual o plano projetivo é bom é a pintura figurativa. Outra, para esc números de loteria.

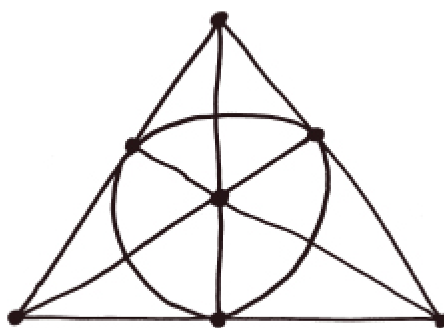
## Uma geometria minúscula

A geometria do plano projetivo é governada por dois axiomas.

Todo par de pontos é contido em exatamente uma reta comum.
Todo par de retas contém exatamente um ponto comum.

Tendo encontrado *um* tipo de geometria que satisfizesse esses dois axiomas perfeitar sintonizados, era natural perguntar se haveria outra. Acontece que há uma porção. Alg são grandes, algumas são pequenas. A mais minúscula de todas é chamada *plano de*

em homenagem a seu criador, Gino Fano, que no fim do século XIX foi um dos prin matemáticos a levar a sério a ideia de geometrias finitas. A aparência dela é a seguinte

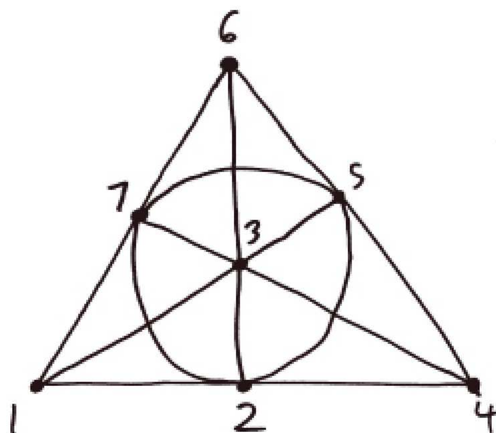


Essa é uma geometria realmente pequena, consistindo apenas em sete pontos! As “ nessa geometria são as curvas mostradas no diagrama. São pequenas também, possu apenas três pontos cada. Elas são sete, seis delas *têm aparência* de retas e a outra apar de um círculo. No entanto, essa assim chamada geometria, por mais exótica que seja, sa os axiomas 1 e 2 tão bem quanto o plano de Brunelleschi.

Fano tinha uma abordagem admiravelmente moderna. Usando a frase de Hardy, ele “o hábito da definição”, evitando a irrespondível pergunta de o que a geometria *reali era*. Em vez disso, perguntava: que fenômenos se comportam como geometria? Nas pa do próprio Fano: “Como base do nosso estudo, assumimos uma *variedade* qualqu entidades de natureza qualquer, entidades que, por economia, chamaremos de pontos de forma bastante independente de sua natureza.”[4]

Para Fano e seus herdeiros intelectuais, não importa se uma reta “parece” uma ret círculo, um pato-bravo ou qualquer outra coisa. Tudo que importa é que as retas *obec às leis* das retas estabelecidas por Euclides e seus sucessores. Se anda como geome grasna como geometria, nós chamamos de geometria. Para um determinado mod pensar, essa atitude constitui uma ruptura entre a matemática e a realidade, e deve-se re a ela. Mas é uma visão muito conservadora. A ousada ideia de que podemos p geometricamente sobre sistemas que não têm aparência de espaço euclidiano,[i] e até m chamar esses sistemas de “geometrias”, de cabeça erguida, acabou revelando-se crítica a compreensão da geometria do espaço-tempo relativista no qual vivemos. Hoje us ideias geométricas generalizadas para mapear paisagens na internet, que estão ainda distantes de qualquer coisa que Euclides pudesse ser capaz de reconhecer. Isso é par glória da matemática. Nós desenvolvemos um corpo de ideias. Uma vez que estejam cor *elas são corretas*, mesmo quando aplicadas longe, muito longe do contexto na qual f inicialmente concebidas.

Por exemplo, eis novamente o plano de Fano, mas com os pontos rotulados pelos núm de 1 a 7:




Parece familiar? Se listarmos as sete retas, registrando para cada uma o conjunto d
pontos que a constituem, obtemos:

124
135
167
257
347
236
456

Isso nada mais é que o pacote de sete bilhetes que vimos na última seção, aquel
acerta cada par exatamente uma vez, garantindo um retorno mínimo. Naquele mon
essa propriedade pareceu impressionante e mágica. Como poderia alguém surgir co
conjunto de bilhetes arranjado com tamanha perfeição?

Mas agora eu abri a caixa e revelei o truque: é simples geometria. Cada par de nú
aparece exatamente em um bilhete porque cada par de pontos aparece exatamente er
reta. É apenas Euclides, ainda que agora estejamos falando de pontos e retas que Eu
não teria reconhecido como tais.

## Desculpe, mas você disse "bofab"?

O plano de Fano nos diz como jogar a loteria de sete números da Transilvânia sem
qualquer risco, mas e a loteria de Massachusetts? Há montes de geometrias finitas com
que sete pontos, mas nenhuma, infelizmente, que atenda precisamente às exigênci
Cash WinFall. É necessário algo mais geral. A resposta não vem diretamente da pi
renascentista nem da geometria euclidiana, mas de outra fonte improvável: a teor
processamento digital de sinais.

Suponha que eu queira mandar uma mensagem importante para um satélite, como "
o propulsor direito". Satélites não falam inglês, então, o que estou de fato enviando é
sequência de 1 e 0, que os cientistas da computação chamam de bits.

1110101 …

Essa mensagem parece direta e sem ambiguidade. No entanto, na vida real, os can comunicação têm ruídos. Talvez um raio cósmico atinja o satélite exatamente no mor em que ele está recebendo a transmissão e adultere um bit da mensagem, de modo satélite recebe

1010101 …

A mensagem não parece muito diferente, mas se a mudança do bit troca a instruç "propulsor direito" para "propulsor esquerdo", o satélite pode estar em sérios apuros.

Satélites são caros, então você realmente quer evitar o problema. Se estivesse ten falar com um amigo numa festa barulhenta, você teria de se repetir para evitar que o afogasse a mensagem. O mesmo artifício funciona com o satélite. Na nossa mens original, podemos repetir duas vezes cada bit, enviando 00 em vez de 0 e 11 em vez d

11 11 11 00 11 00 11 …

Agora, quando o raio cósmico atinge o segundo bit da mensagem, o satélite vê

10 11 11 00 11 00 11 …

O satélite *sabe* que cada segmento de dois bits deve ser ou 00 ou 11, então aquel inicial é uma bandeira vermelha, alguma coisa está errada. Mas o quê? É duro para o s descobrir. Como ele não sabe exatamente onde o ruído corrompeu o sinal, não há saber se a mensagem original começava com 00 ou 11.

Esse problema também pode ser consertado. Basta repetir três vezes, em lugar de

111 111 111 000 111 000 111 …

A mensagem chega corrompida da seguinte maneira:

101 111 111 000 111 000 111 …

Mas agora o satélite está numa boa. O primeiro segmento de três bits, ele sabe, de 000 ou 111, de modo que a presença de 101 significa que algo está errado. Mas se a mens original fosse 000, *dois* bits muito próximos devem ter sido corrompidos, evento impro porque a frequência de raios cósmicos atingindo mensagens é bastante pequena. Er satélite tem bons motivos para seguir a maioria: se dois dos três bits são 1, é muito chance de que a mensagem original seja 111.

O que você acabou de testemunhar é um exemplo de *código de correção de erros*, prot de comunicação que permite ao receptor eliminar os erros de um sinal com ruído.[j] A

como basicamente tudo o mais na teoria da informação, vem do monumental artigo e por Claude Shannon em 1948, "Uma teoria matemática da comunicação".

Uma teoria matemática da comunicação! Isso não soa um pouquinho pompo: comunicação não é fundamentalmente uma atividade humana que não pode ser redu: fórmulas e números frios?

Entenda o seguinte: eu endosso calorosamente, na verdade *recomendo fortement* áspero ceticismo diante de todas as alegações que "tal e tal" entidade pode ser explica domada, ou completamente entendida, por meios matemáticos.

No entanto, a história da matemática é uma história de agressiva expansão territo medida que as técnicas matemáticas ficam mais amplas e mais ricas e os matem encontram formas de abordar questões antes julgadas fora de seu domínio. "Uma matemática da probabilidade" agora soa familiar, mas na época poderia parecer uma en pretensão. A matemática dizia respeito ao certo e ao verdadeiro, e não ao casual e ao " seja assim"! Tudo isso mudou quando Pascal, Bernoulli e outros descobriram leis ma ticas que governavam o funcionamento do acaso.[k] Uma teoria matemática do infinito? do trabalho de Georg Cantor, no século XIX, o estudo do infinito era tanto teologia q ciência. Agora compreendemos a teoria de Cantor de múltiplos infinitos, cada um in mente maior que o anterior, bem o bastante para ensiná-la a estudantes de matemáti 1º ano. (Para ser sincero, ela meio que pira a cabeça deles.)

Esses formalismos matemáticos não captam cada detalhe do fenômeno que descr nem têm intenção de fazê-lo. Há questões sobre aleatoriedade, por exemplo, a respei quais a teoria da probabilidade se cala. Para algumas pessoas, os problemas que fican do alcance da matemática são os mais interessantes. Contudo, pensar cuidadosamente o acaso, nos dias atuais, *sem* ter a teoria da probabilidade presente em algum ponto erro. Se você não acredita em mim, pergunte a James Harvey. Ou melhor, pergu pessoas cujo dinheiro ele ganhou.

Haverá uma teoria matemática da consciência? Ou da sociedade? Da estética? Há tentando, até agora com sucesso apenas limitado. Você deve desconfiar de todas alegações por instinto. Mas deve também ter em mente que elas podem acabar acer em alguns aspectos importantes.

De início, o código de correção de erros não parece matemática revolucionária. S está numa festa barulhenta, você repete o que diz, e problema resolvido! Mas essa so tem um custo. Se você repetir três vezes cada pedacinho da sua mensagem, ela leva o do tempo para ser transmitida. Isso talvez não seja problema numa festa, mas talvez se você precisasse que o satélite ligasse o propulsor direito *neste exato segundo*. Shann artigo em que lançou a teoria da informação, identifica a escolha básica com a q engenheiros precisam lidar até hoje: quanto mais resistente ao ruído você quer que seu sinal, com mais lentidão seus bits são transmitidos. A presença do ruído inse limite para o tamanho da mensagem que seu canal pode transmitir de forma confiável dada quantidade de tempo. Esse limite é o que Shannon chamou de *capacidade* do Assim como um encanamento só pode escoar certa quantidade de água, um canal só escoar certa quantidade de informação.

Mas corrigir erros não requer que você torne seu canal três vezes mais largo, con protocolo "repita três vezes". Você pode se sair melhor, e Shannon sabia disso perfeitan porque um de seus colegas nos Laboratórios Bell, Richard Hamming, já havia desco como.

Hamming, jovem veterano do Projeto Manhattan,[6] tinha acesso de baixa priorida computador de relés mecânicos de 10 toneladas Modelo V dos Laboratórios Bell. Ele a tinha permissão de rodar seus programas nos fins de semana. O problema era que qua erro mecânico podia interromper sua computação, não havendo ninguém à disposiçã religar a máquina até segunda-feira de manhã. Era muito irritante. E, como saben irritação é um dos grandes estímulos para o progresso técnico. Não seria melhor, p Hamming, se a máquina pudesse corrigir seus próprios erros e se manter ligada? Ent desenvolveu um plano. Os dados de entrada para o Modelo V podiam ser pensados uma série de 0 e 1, exatamente como a transmissão para o satélite – a matemática r importa se esses dígitos são bits numa sequência digital, os estados de um relé elétri furos numa tira de papel (na época, uma interface de dados refinadíssima).

O primeiro passo de Hamming foi quebrar a mensagem em blocos de três símbolo

111 010 101 …

O *código de Hamming*[1] é uma regra que transforma cada um desses blocos de três d numa sequência de sete dígitos. Eis o manual do código:

000 → 0000000
001 → 0010111
010 → 0101011
011 → 0111100
101 → 1011010
110 → 1100110
100 → 1001101
111 → 1110001

A mensagem codificada teria o seguinte aspecto:

1110001 0101011 1011010 …

Esses blocos de sete bits são chamados *palavras de código*. As oito palavras de códig os únicos blocos que o código permite. Se o receptor vir qualquer outra coisa chegar fio, sem dúvida há algo errado. Digamos que você receba 1010001. Você sabe que iss pode estar certo, porque 1010001 não é uma palavra de código. E mais, a mensager você recebeu difere em apenas uma posição da palavra de código 1110001. E não há *nen outra* palavra de código que esteja tão perto da transmissão embaralhada que você ef mente viu. Assim, você pode se sentir bastante seguro para adivinhar que a palav

código que o seu correspondente quis enviar era 1110001, o que significa que o corre
dente bloco de três dígitos na mensagem original era 111.

Você pode achar que nós apenas tivemos sorte. E se a transmissão misteriosa est próxima de duas palavras de código diferentes? Não teríamos como fazer um julgar confiante. Mas isso não pode ocorrer, e eis por quê. Olhe novamente as retas do pla Fano:

124
135
167
257
347
236
456

Como você descreveria essa geometria para o computador? Computadores gosta conversar em 0 e 1, então escreva cada reta como uma sequência de 0 e 1, onde 0 na pc *n* representa "ponto *n* está na reta" e 1 na posição *n* significa "ponto *n* não está na reta". a primeira reta, 124, é representada como

0010111

e a segunda reta, 135, é

0101011

Você notará que ambas as sequências são palavras de código de Hamming. Na ver as sete palavras de código diferentes de 0 no código de Hamming correspondem exatar às sete retas no plano de Fano. O código de Hamming e o plano de Fano (e, já que est no assunto, o pacote de bilhetes ideal para a loteria da Transilvânia) são exatamente o m objeto matemático em duas roupagens diferentes!

Essa é a geometria secreta do código de Hamming. Uma palavra de código é um con de três pontos no plano de Fano que formam uma reta. Trocar um bit na sequência eq a adicionar ou apagar um ponto, então, enquanto a palavra de código original nã 0000000, a transmissão truncada que você recebe corresponde a um conjunto com q ou dois pontos.[m] Se você recebe um conjunto de dois pontos, vai saber como descol ponto que falta; é simplesmente o terceiro ponto na reta única que liga os dois pontc você recebeu. E se você receber um conjunto de quatro da forma "reta mais um ponto e Então você pode inferir que a mensagem correta consiste nos três pontos do seu con que formam uma reta. Apresenta-se aqui uma sutileza: como você sabe que existe *a um* modo de escolher esse conjunto de três pontos? Para facilitar, vamos dar nome pontos: A, B, C e D. Se A, B, C estão todos na mesma reta, então A, B e C deve ser o con

numa reta? Não se preocupe: isso é impossível, porque a reta que contém A, B e C e que contém A, C e D teriam dois pontos A e C em comum. Contudo, duas retas pod intersectar apenas em *um* ponto; a regra é essa.[n] Em outras palavras, graças ao axior geometria, o código de Hamming tem a mesma propriedade mágica de correção de que o "repita três vezes"; se uma mensagem é modificada durante o caminho em um bit, o receptor sempre pode descobrir que mensagem o transmissor pretendia enviar em vez de multiplicar seu tempo de transmissão por três, seu novo código melhorado n apenas sete bits para cada três bits da mensagem original, uma razão mais eficiente de

A descoberta de códigos de correção de erros, tanto os primeiros códigos de Ham quanto os códigos mais possantes que o seguiram, transformou a engenharia da inforn O objetivo não precisava mais ser construir sistemas tão pesadamente protegidos e c mente conferidos, em que erros não podiam aparecer jamais. Depois de Hamm Shannon, bastava tornar os erros *raros o suficiente* para que a flexibilidade do códi correção pudesse contra-atacar qualquer ruído que passasse. Os códigos de correç erros são agora encontrados sempre que os dados precisam ser comunicados de f rápida e confiável.

O satélite em órbita em torno de Marte, *Mariner 9*, enviou fotos da superfície do pl para a Terra usando um código desses, o código de Hadamard. Os CDs são codificado o código de Reed-Solomon, e é por isso que você pode arranhá-los, e eles ainda perfeitos. (Leitores nascidos após, digamos, 1990, que não têm familiaridade com podem simplesmente pensar em *flash-drives*, que usam, entre outras coisas, os có similares de Bose-Chaudhuri-Hocquenghem para evitar corrupção de dados.) O seu nú de identificação bancária é codificado usando um código simples chamado *checksum* se trata exatamente de um código de correção, mas apenas de um código de *detecç* erros, como o protocolo "repita cada bit duas vezes". Se você digita um número erra computador que está executando a transferência pode não ser capaz de identificar o nú que você realmente quis digitar, mas pelo menos percebe que há algo de errado, e mandar seu dinheiro para o banco errado.

Não está claro se Hamming entendeu toda a extensão das aplicações de sua nova té mas seus patrões na Bell decerto tinham alguma ideia, como ele descobriu quando t publicar seu trabalho:

> O Escritório de Patentes não liberava a coisa até ter a cobertura de patente. … Eu não acreditava que pudessem pa um punhado de fórmulas matemáticas. Eu disse que não podiam. Eles disseram: "Você vai ver." E estavam certos então, fiquei sabendo que eu tenho uma compreensão muito parca da lei de patentes, porque, regularmente, coi não se poderiam patentear – é ultrajante – podem ser patenteadas.[7]

A matemática avança com mais rapidez que o Escritório de Patentes. O matemá físico suíço Marcel Golay ficou sabendo das ideias de Hamming por intermédio de Shai e desenvolveu ele mesmo muitos códigos novos, sem saber que o próprio Hamming elaborado os mesmos códigos por trás da cortina das patentes. Golay foi o prim publicar,[8] o que gerou uma confusão sobre crédito que persiste até hoje. Quanto à pa a Bell obteve-a, mas perdeu o direito de cobrar pela licença como parte de um a antitruste de 1956.[9]

O que fez o código de Hamming dar certo? Para entender, você precisa chegar a ele de outra direção e perguntar: o que o faria falhar?

Lembre-se, o terror de um código de correção de erros é um bloco de dígitos que simultaneamente perto de duas palavras *diferentes* do código. Um receptor apresent uma sequência de bits contraventora ficaria desorientado a princípio, sem recursos determinar qual palavra de código corrompida aparecia na transmissão original.

Parece que aqui estamos usando uma metáfora: blocos de dígitos binários nã posições, então, a que estamos nos referindo quando dizemos "perto" de duas palav código diferentes? Uma das grandes contribuições conceituais de Hamming foi insist dizer que isso não era só uma metáfora, nem precisava ser. Ele introduziu uma nova de distância, agora chamada *distância de Hamming*, adaptada à nova matemática da mação exatamente como a distância entendida por Euclides e Pitágoras foi adapt geometria do plano. A definição de Hamming era simples: a distância entre dois bloc número de bits que você necessita alterar na ordem para transformar um bloco no Assim, a distância entre as palavras de código 0010111 e 0101011 é 4; para passar da pri para a última, você precisa mudar os bits na segunda, terceira, quarta e quinta posiçõ

As oito palavras de código de Hamming são um bom código porque nenhum blo sete bits está a uma distância de Hamming de 1 em relação a duas palavras diferent código. Se estivesse, as duas palavras do código estariam dentro de uma distânc Hamming de 2 uma da outra.[9] Mas você pode verificar sozinho e ver que nenhum par palavras de código difere em apenas duas posições; na verdade, quaisquer duas palav código estão, entre si, a uma distância de Hamming de pelo menos 4. Você pode pens palavras de código como algo semelhante a elétrons numa caixa, ou pessoas antiss num elevador. Elas têm um espaço confinado para dividir e, dentro dessas restrições, te estabelecer a máxima distância mútua possível.

O mesmo princípio está por trás de todas as formas de comunicação resistentes a A linguagem natural funciona da seguinte maneira: se eu escrevo **linvuagem** em v **linguagem**, você pode descobrir o que eu queria dizer, porque não há nenhuma palavra que esteja distante por uma letra da palavra **linvuagem**. Isso cai por terra, quando você começa a olhar palavras mais curtas: pano, cano, dano e mano – além d – são palavras que podem ser perfeitamente utilizadas, cada qual com seu significado, surto de ruído que apague o primeiro fonema torna impossível saber o que ele quer Mesmo nesse caso, porém, pode-se usar a distância semântica entre as palavras para a a corrigir o erro. Se você fez uma roupa, provavelmente é pano; se conduziu água, pro mente é cano; e assim por diante.

Você pode tornar a linguagem mais eficiente – porém, ao fazê-lo, depara com a m difícil escolha que Shannon descobriu. Muita gente de credo nerd e/ou matemático trabalhado arduamente para criar linguagens que carreguem informação de maneira pacta e precisa, sem nada da redundância, sinonímia e ambiguidade que as línguas co nossa favorecem. Ro foi uma língua artificial[10] criada em 1906 pelo reverendo Edward F Foster, que pretendia substituir o emaranhado do vocabulário inglês por um léxico no o sentido de cada palavra podia ser deduzido logicamente de seu som. Talvez nã

impunha sobre o acervo da biblioteca pública uma organização igualmente rígida. D
o Ro é admiravelmente compacto; uma porção de palavras longas em inglês,
**ingredient** (“ingrediente”), ficam muito mais curtas em Ro, em que você simplesmen
**cegab.**

Mas a compactação tem seu custo. Você perde a correção de erros que o inglês o
como característica embutida. No elevador pequeno, lotado, os passageiros não têm
espaço pessoal. Isso vale dizer que cada palavra em Ro é muito próxima de um mo
outras, criando oportunidades de confusão. A palavra para “cor” em Ro é **bofab.** M
você mudar uma letra, formando **bogab**, tem a palavra para “som”. **Bokab** significa “
cidade” e **bolab** significa “sabor”. Pior ainda, a estrutura lógica do Ro leva palavras d
similar a ter também sentidos similares, tornando impossível descobrir o que se p
partir do contexto. **Bofoc, bofof, bofog** e **bofol** significam “vermelho”, “amarelo”, “ve
“azul”, respectivamente. Faz um pouco de sentido ter a semelhança conceitual represe
no som, contudo, também dificulta muito falar sobre cores em Ro numa festa cheia de
“Desculpe, você disse ‘bofoc’ ou ‘bofog’?”[q]

Algumas modernas línguas construídas, por outro lado, vão em outra direção, fa
uso explícito dos princípios formulados por Hamming e Shannon. O lojban, u
exemplos contemporâneos mais bem-sucedidos,[r] tem uma regra estrita de que du
raízes básicas, ou *ginsu*, jamais podem ser muito próximas foneticamente.

A noção de “distância” de Hamming segue a filosofia de Fano – uma grandeza que g
como distância tem o direito de se comportar como distância. Mas por que parar
conjunto de pontos a uma distância menor ou igual a 1 em relação a dado ponto centr
um nome em geometria euclidiana: chama-se círculo, ou, se adicionarmos dime
superiores, esfera.[s] Então, somos compelidos a chamar o conjunto de sequências a
distância de Hamming de no máximo 1[t] em relação a uma palavra de código como “
de Hamming”, com a palavra de código no centro. Para um código ser um código de co
de erros, nenhuma sequência – nenhum *ponto*, se vamos levar a analogia geométrica a
– pode estar a uma distância menor que 1 de duas palavras de código diferentes; em
palavras, pedimos que duas esferas de Hamming com centro nas palavras de código j
tenham pontos em comum.

A questão de construir códigos de correção de erros tem a mesma estrutura qu
problema clássico de geometria, o de *empacotamento de esferas*: como encaixamos
espaço pequeno um monte de esferas do mesmo tamanho da maneira mais apertada po
de modo que duas delas não se superponham? De modo mais sucinto, quantas laranja
consegue pôr numa caixa?

O problema do empacotamento de esferas é bem mais velho que os códigos de co
de erros. Remonta ao astrônomo Johannes Kepler,[11] que escreveu um livreto, em
chamado *Strena Seu De Nive Sexangula* ou “O floco de neve de seis pontas”. Apesar do
bastante específico, o livro de Kepler contempla a questão geral da origem da forma na
Por que os flocos de neve e os favos de uma colmeia formam hexágonos, enqua
câmaras de sementes de uma maçã tendem a vir em grupos de cinco? E o mais rele
para nós agora: por que as sementes de romãs tendem a ter doze lados planos?

Eis a explicação de Kepler. A romã quer encaixar o máximo possível de sementes d da película. Em outras palavras, ela está realizando um problema de empacotamen esferas. Se acreditarmos que a natureza faz o serviço da melhor maneira possível, essas esferas devem ser arranjadas da forma mais densa possível. Kepler argumentou empacotamento mais compacto possível era obtido da maneira a seguir. Começamos uma camada plana de sementes, arrumadas num padrão regular como:



A camada seguinte vai ter exatamente a mesma aparência que esta, só que colc astuciosamente, para que cada semente fique assentada no pequeno vão triangular for pelas três sementes abaixo dela. Outras camadas se adicionam da mesma maneira. A bom ter um pouco de cuidado: apenas metade dos vãos vai sustentar esferas da ca acima, e em cada estágio você tem a opção de *qual* metade de vãos deseja preench escolha costumeira, chamada *reticulado cúbico de face centrada*, tem uma bela proprie cada camada tem as esferas colocadas diretamente acima das esferas de três camadas al Segundo Kepler, não existe meio mais denso de empacotar esferas no espaço. A no ( lhamento cúbico de face centrada, cada esfera toca exatamente doze outras. À medid crescem as sementes da romã, raciocinou Kepler, cada uma se pressiona contra suas vizinhas, achatando sua superfície perto do ponto de contato e produzindo as figu doze lados observadas.

Não tenho ideia se Kepler tinha razão com respeito às romãs,[u] mas sua alegação d o empilhamento cúbico de face centrada é o empacotamento de esferas mais denso to se tema de enorme interesse matemático durante séculos. Kepler não ofereceu prova c afirmação; aparentemente, pareceu-lhe certo que o empilhamento cúbico de face cer não podia ser superado. Gerações de quitandeiros, que empilham laranjas em configu cúbica de face centrada sem preocupação nenhuma de saber se seu método é o m possível, concordam com ele. Os matemáticos, essa tribo exigente, queriam confirn absoluta, e não em relação a círculos e esferas. Uma vez que você já está metido no rei matemática pura, nada impede que vá além dos círculos e esferas para dimensões mais altas, empacotando as chamadas hiperesferas de dimensão superior a 3. Será história geométrica dos empacotamentos de esferas de dimensão superior nos dá al compreensão sobre a teoria dos códigos de correção de erros, como aconteceu com a hi geométrica do plano projetivo? Nesse caso, o fluxo tem sido em sua maior parte no se oposto;[v] os insights da teoria da codificação instigaram progressos na área dos empa mentos de esferas. John Leech, nos anos 1960, usou um dos códigos de Golay para con um empacotamento incrivelmente denso de esferas 24-dimensionais, numa configu agora conhecida como empilhamento de Leech. Esse é um lugar muito apertado, onde uma das esferas 24-dimensionais toca 196.560 de suas vizinhas. Ainda não sabemos

empacotamento de 24 dimensões mais compacto possível, porém, em 2003, Henry C
e Abhinav Kumar[12] provaram que, se houver um empilhamento mais denso, vencerá
por um fator de no máximo

1,00000000000000000000000000000165.

Em outras palavras, perto o suficiente.

Você pode ser perdoado por não dar importância a esferas 24-dimensionais e ajeitá-las da melhor maneira possível, mas aqui está a coisa: qualquer objeto matemáti impressionante quanto o empilhamento de Leech tende a ser importante. Acabou se d brindo que o empilhamento de Leech era muito rico em simetrias de um tipo verda mente exótico. John Conway, o mestre em teoria de grupos, ao deparar com o empilhan em 1968, calculou todas as simetrias numa orgia de doze horas de computação em um e gigantesco rolo de papel.[13] Essas simetrias acabaram formando algumas das peças da teoria geral dos grupos de simetria finitos que preocupavam os algebristas durante g parte do século XII.[x]

Quanto às velhas e boas laranjas tridimensionais, acontece que Kepler estava cert empacotamento era o melhor possível – mas isso ficou sem comprovação por quase q centos anos, e afinal foi solucionado em 1998, pelas mãos de Thomas Hales, então pro na Universidade de Michigan. Hales resolveu o assunto com um argumento difícil e deli que reduzia o problema a uma análise de meros poucos milhares de configurações de es com as quais lidou por meio de maciços cálculos de computadores. O argumento di delicado não apresentava problema para a comunidade matemática. Estamos acostun com eles, e essa parte do trabalho de Hales logo foi julgada e considerada correta. Os ma cálculos de computador, por outro lado, eram mais traiçoeiros. Uma prova pode ser cada até o último detalhe, mas um programa de computador é algo de outro tip princípio, um ser humano pode conferir cada linha de um programa. Todavia, m depois de fazê-lo, como você pode ter certeza de que o programa rodou corretamente

Os matemáticos aceitaram quase universalmente a prova de Hales, mas ele próprio ter sido picado pelo desconforto inicial com a dependência da prova em relação à co tação. Desde a resolução da conjectura de Kepler, Hales se afastou da geometria, deixou famoso, e voltou-se para o projeto de verificação formal de provas. Ele vislum e está trabalhando para criar – uma futura matemática com aspecto muito diferen nossa. Na sua visão, as provas matemáticas, sejam elas auxiliadas pelo computad executadas por seres humanos, a lápis, tornaram-se tão complicadas e interdependent não podemos mais ter plena confiança em sua correção. A classificação de grupos si finitos, o programa agora completo do qual a análise de Conway do empilhamento de formou parte crucial, está distribuída em centenas de artigos de centenas de au totalizando cerca de 10 mil páginas. Nenhum ser humano vivo pode se considerar c cedor de todo esse material. Então, como podemos dizer que realmente está certo?

Hales acha que não temos escolha a não ser começar tudo de novo, reconstruindo o

verificada pela máquina. Se o programa que verifica a prova formal é ele próprio verif (e isso, argumenta Hales, de forma convincente, é uma meta viável), podemos nos lil para sempre de controvérsias como aquela que Hales enfrentou, debatendo se uma pı realmente boa. E a partir daí? O passo seguinte talvez sejam computadores capaz elaborar provas, ou mesmo de *ter ideias*, sem nenhuma intervenção humana.

Se isso efetivamente acontecer, terá terminado a matemática? É óbvio que, se as máq alcançarem e depois superarem os seres humanos em todas as dimensões mentais, usa nos como escravos, rebanhos ou brinquedos, como predizem alguns dos futuristas extravagantes, então, sim, a matemática terá terminado, assim como todo o resto. Mas isso, eu acho que a matemática provavelmente sobreviverá. Afinal, ela há décadas vem s auxiliada pelo computador. Muitos cálculos que um dia foram contados como "peso hoje não são considerados mais criativos ou elogiáveis que somar uma série de númer dez dígitos. Quando seu laptop pode fazer a conta, já não é mais matemática. Mas iss tirou o trabalho da matemática. Nós conseguimos nos manter adiante do sempre cres predomínio do computador, como heróis de filmes de ação que ganham a corrida de bola de fogo.

Será que a inteligência das máquinas do futuro irá nos liberar de grande parte do tra que hoje consideramos pesquisa? Se isso acontecer, reclassificaremos essa pesquisa "computação". O que quer que nós, seres humanos de mentalidade quantitativa, estive fazendo com nosso novo tempo livre, chamaremos isso de "matemática".

O código de Hamming é bastante bom, mas ainda se pode esperar algo melhor. A há certo desperdício no código de Hamming. Mesmo nos tempos da fita perfurada relés mecânicos, os computadores eram confiáveis o bastante para que todos os bloc sete bits saíssem incólumes. O código parece conservador demais, e decerto nos darí bem acrescentando menos bits à prova de falhas à nossa mensagem. Isso é possível. E que prova o famoso teorema de Shannon. Por exemplo, se os erros aparecem numa ta um para mil bits, Shannon nos diz que há códigos que tornam a mensagem apenas mais longa que a forma não codificada. E, melhor ainda, fazendo os blocos básicos r mais compridos, você pode achar códigos que atinjam essa velocidade e satisfaçam qua grau desejado de confiabilidade, por mais estrito que seja.

Como Shannon construiu esses códigos excelentes? Bem, aí está, ele não cons Quando você encontra uma construção intrincada como a de Hamming, fica naturalı inclinado a pensar que um código de correção de erros é algo muito especial, projet engendrado, torcido e retorcido até que cada par de palavras do código tenha sido d damente separado sem forçar qualquer outro par a se juntar a eles. A genialidade de Sha foi notar que essa visão é totalmente errada. Os códigos de correção de erros são o o de alguma coisa especial. Shannon provou – e uma vez tendo ele entendido *o que* p realmente não foi tão difícil – que *quase todos* os conjuntos de palavras de código exib propriedade de correção de erros. Em outras palavras, um código totalmente aleatóric nenhum projeto, tinha grande probabilidade de ser um código de correção.

Esse foi um avanço surpreendente, para dizer o mínimo. Imagine que você incumbido da tarefa de construir um *hovercraft*. Sua primeira abordagem seria jogar toriamente no chão um monte de partes de motor e tubulações de borracha, achando resultado disso fosse flutuar?

Quarenta anos depois, em 1986, Hamming, ainda impressionado, falou sobre a prc Shannon:

> Coragem é uma das coisas que Shannon tinha de forma suprema. Basta pensar no seu principal teorema. Ele qu um método de codificação, mas não sabe o que fazer, então faz um código aleatório. Aí encalha. Então faz a p impossível: "O que faria o código aleatório médio?" Então prova que o código médio é arbitrariamente bon portanto deve haver pelo menos um código bom. Quem, a não ser um homem de coragem infinita, teria ousado assim? Isso é característico de grandes cientistas. Eles têm coragem. Eles prosseguem mesmo em circunstâncias ir Pensam e continuam a pensar.

Se um código aleatório tinha grande probabilidade de ser um código de correç erros, qual o problema de Hamming? Por que não escolher palavras de código com mente aleatórias, assegurado pelo conhecimento de que o teorema de Shannon torna provável que o código corrija erros? Eis a questão desse plano: não basta que o códig capaz de corrigir erros, em princípio; ele precisa ser prático. Se um dos códigos de Sha usa blocos de tamanho cinquenta, então a quantidade de palavras do código é a quant de sequência 0-1 com 50 bits de comprimento, que é 2 elevado à potência 50, pouco de 1 quatrilhão. Número grande.

A sua espaçonave recebe um sinal, supostamente uma entre esse quatrilhão de pa de código, ou pelo menos perto de ser uma. Mas *qual*? Se você tiver de passar pelo quat de palavras de código, uma a uma, estará em grandes apuros. É novamente a exp combinatória, e nesse contexto ela nos força a fazer outra escolha. Códigos muito es rados, como o de Hamming, tendem a ser fáceis de decodificar. Mas esses códigos especiais, como acabamos de descobrir, em geral não são tão eficientes quanto os có completamente aleatórios que Shannon estudou. Nas décadas entre aquela época e os matemáticos tentaram dominar essa fronteira conceitual entre estrutura e aleatorie batalhando para elaborar códigos aleatórios o bastante para serem rápidos, mas sufic mente estruturados para serem decodificáveis.

O código de Hamming é ótimo para a loteria da Transilvânia, mas não tão efeti caso do Cash WinFall. A loteria da Transilvânia só tem sete números; Massachusetts of 46. Vamos precisar de um código maior. O melhor que pude encontrar para esse prop foi descoberto por R.H.F. Denniston,[14] da Universidade de Leicester, em 1976. Ele é beleza.

Denniston escreveu uma lista de 285.384 combinações de seis números a partir de escolha de 48 números. A lista começa assim:

1 2 48 3 4 8

2 3 48 4 5 9

1 2 48 3 6 32 …

Os dois primeiros bilhetes têm quatro números em comum: 2, 3, 4 e 48. Mas – e está o milagre do sistema de Denniston – você jamais encontrará quaisquer dois bi que tenham *cinco* números em comum. Você pode traduzir o sistema de Dennistor um código, assim como fizemos com o plano de Fano: substituir cada bilhete por sequência de 48 1 e 0, com um 0 no lugar correspondente aos números no bilhete e lugar correspondente aos números ausentes no bilhete. O primeiro bilhete seria trad numa palavra de código.

000011101111111111111111111111111111111111111110

Verifique você mesmo: o fato de não haver dois bilhetes que tenham em comum dos seis números significa que esse código, como o de Hamming, tem duas palavı código separadas por uma distância de Hamming não inferior a 4.[y]

Outra maneira de dizer isso é que toda combinação de cinco números aparec máximo, uma vez nos bilhetes de Denniston. E a coisa fica ainda melhor: na verdade combinação de cinco números aparece em *exatamente* um bilhete.[z]

Como você pode imaginar, muito cuidado é exigido na escolha dos bilhetes da li Denniston. Denniston incluiu no seu artigo acadêmico um programa de computado Algol que verifica que a lista realmente tem a propriedade mágica que ele alega, um bastante avançado para os anos 1970. Ainda assim, ele insiste que o papel do compu nessa colaboração deve ser entendido como estritamente subordinado ao seu próprio “Eu gostaria, de fato, de deixar claro que todos os resultados aqui anunciados encontrados sem o recurso de computadores, embora eu sugira que os computa possam ser usados para verificá-los.”

O Cash WinFall tem somente 46 números, então, para jogar no estilo de Denniston precisa destruir um pouco a bela simetria jogando fora todos os bilhetes do sistema niston contendo 47 ou 48. Isso ainda deixa você com 217.833 bilhetes. Suponha que pegue US$ 435.666 de dentro do colchão e resolva jogar esses números. O que aconte

A loteria sorteia seis números – digamos 4, 7, 10, 11, 34, 46. No improvável ever que eles combinem exatamente com um de seus bilhetes, você ganhou a grande b Mesmo que não, você ainda está na fila para ganhar uma saudável pilha de dinheir acertar cinco dos seis números. Você tem um bilhete com 4, 7, 10, 11, 34? *Um* dos bi de Denniston é esse, então, o único jeito de você não ganhar é se o bilhete de Denr com esses cinco números era 4, 7, 10, 11, 34, 47 ou 4, 7, 10, 11, 34, 48, e portanto foi lixo.

E quanto a uma combinação numérica diferente, como 4, 7, 10, 11, 46? Talvez você tido azar da primeira vez, porque 4, 7, 10, 11, 34, 47 era um dos bilhetes de Denniston acontece que 4, 7, 10, 11, 46, 47 não pode estar na lista de Denniston, porque haveria posições em comum com um bilhete que você já sabe que está lá. Em outras palavras madito 47 não deixa você ganhar um prêmio da quina, não pode fazer você perder ne dos outros. O mesmo vale para 48. Assim, das seis possibilidades de acertar a quina:

4, 7, 10, 11, 46
4, 7, 10, 34, 46
4, 7, 11, 34, 46
4, 10, 11, 34, 46
7, 10, 11, 34, 46,

está *garantido* de que você tem pelo menos quatro delas entre seus bilhetes. Na verda você comprar os 217.833 bilhetes de Denniston, terá:

2% de chance de acertar a grande bolada.
72% de chance de ganhar seis dos prêmios da quina.
24% de chance de ganhar cinco dos prêmios da quina.
2% de chance de ganhar quatro dos prêmios da quina.

Compare isso com a estratégia de Selbee, de usar Quick Pik para escolher bi aleatoriamente. Nesse caso, há uma pequena chance, 0,3%, de ficar totalmente de fo prêmios da quina. Pior, há 2% de chance de tirar só um desses prêmios, 6% de tirar 11% de tirar três e 15% de tirar quatro. Os retornos garantidos da estratégia de Den são substituídos pelo risco. Naturalmente esse risco tem seu lado positivo também. A e de Selbee tem 32% de chance de tirar mais que seis desses prêmios, o que é impossí você escolher seus bilhetes de acordo com Denniston. O valor esperado dos bilhe Selbee é o mesmo que os de Denniston, ou de qualquer outra pessoa. Mas o méto Denniston protege o jogador dos ventos do acaso. Para jogar na loteria sem risco, não jogar centenas de milhares de bilhetes. Você tem de jogar as centenas de milhares de bi *certas*.

Teria sido por causa dessa estratégia que a Random Strategies passava o t preenchendo as centenas de milhares de bilhetes à mão? Estariam usando o siste Denniston, desenvolvido no espírito de uma matemática completamente pura, para dinheiro da loteria sem riscos para si mesmos? Esse é o ponto em que meu relato bat a cara no muro. Consegui entrar em contato com Yuran Lu, mas ele não sabia exata como aqueles bilhetes haviam sido escolhidos. Disse-me apenas que tinham um "s para consultar" nos alojamentos dos alunos que lidava com todas essas questões algorít Não posso ter certeza de que o sujeito usava o sistema de Denniston ou algo parecid entanto, se não usava, acho que ele deveria ter usado.

## Ok, tudo bem, você pode jogar na loteria

A essa altura, já documentamos exaustivamente como a opção de jogar na loteria é sempre pobre em termos da quantia esperada, e como, mesmo nos raros casos em valor monetário esperado de um bilhete de loteria excede seu custo, exige-se grande cu para extrair o máximo possível de utilidade esperada dos bilhetes que você compra.

Isso deixa aos economistas com mentalidade matemática um fato inconveniente explicar, o mesmo que deixou Adam Smith perplexo mais de duzentos anos atrás: lo são muito, muito populares. A loteria não é o tipo de situação estudada por Ellsberg, n pessoas se defrontam com decisões contra chances desconhecidas e impossíveis de con A minúscula chance de ganhar na loteria está afixada aí para que todos vejam. O prir de que as pessoas tendem a fazer escolhas que mais ou menos maximizem sua utilid um pilar da economia e faz um bom serviço para modelar o comportamento em tudo, práticas nos negócios até escolhas românticas. Mas não a loteria. Esse tipo de comportar irracional é tão inaceitável para determinadas espécies de economistas quanto o irracional da hipotenusa era para os pitagóricos. Ele não se encaixa no modelo daquil pode ser. No entanto, ele é.

Os economistas são mais flexíveis que os pitagóricos. Em vez de afogar iradamei portadores de más notícias, eles ajustam seus modelos de modo a se encaixar na reali Um relato popular foi fornecido pelos nossos velhos companheiros Milton Friedr Leonard Savage, que propuseram a ideia de que os jogadores da loteria seguem rebuscada curva de utilidade, refletindo o que as pessoas pensam sobre riqueza em te de classes, e não quantidades numéricas. Se você é um trabalhador de classe média que cinco paus por semana em loteria e perde, essa escolha lhe custa um pouco de dinheirc não altera sua posição de classe. Apesar da perda de dinheiro, a utilidade negativa é ba próxima de zero. Mas se você *ganhar*, bom, isso desloca você para outro estrato da socie Você pode pensar nisso como o modelo do "leito de morte" – no seu leito de morte vai se importar porque morreu com um pouquinho menos de dinheiro por ter joga loteria? Provavelmente não. Vai se importar em se aposentar aos 35 anos e passar o re vida praticando mergulho por ter ganhado o grande prêmio da loteria? Sim. Você v importância a isso.

Num afastamento maior da teoria clássica, Daniel Kahnemann e Amos Tversky suge que as pessoas em geral tendem a seguir um caminho diferente daquele imposto exigências da curva de utilidade, não só quando Daniel Ellsberg lhes põe uma urna na da cara, mas no curso geral da vida. Sua "teoria do prospecto" (ou "teoria da perspec que posteriormente valeu o Prêmio Nobel a Kahnemann, agora é vista como o docur básico da economia comportamental, que visa a modelar com a maior fidelidade pos maneira com que as pessoas *de fato* atuam, e não, segundo uma noção abstrata da rac lidade, como elas *deveriam* agir. Na teoria de Kahnemann-Tversky, as pessoas tenc colocar mais peso em eventos de baixa probabilidade do que uma pessoa obedien axiomas de Von Neumann-Morgenstern. Assim, a sedução do pote de ouro excede permitiria um cálculo estrito da utilidade esperada.

Mas a explicação mais simples não requer muito halterofilismo teórico. É sir comprar um bilhete de loteria, quer você ganhe ou não, é, de maneira inofensiva divertimento. Não um divertimento como umas férias no Caribe, nem como passar a dançando numa festa, porém, um divertimentozinho de US$ 2, que tal? É bem possív motivos para se duvidar dessa explicação (por exemplo, os próprios apostadores de l tendem a citar a perspectiva de ganhar como a razão principal de se jogar), mas ela

Economia não é como física, e utilidade não é como energia. Ela não é conservat uma interação entre dois seres pode deixar ambos com mais utilidade do que tinha início. Essa é a visão ensolarada que o adepto do livre mercado tem da loteria. Ela não imposto regressivo, é um *jogo* no qual as pessoas pagam ao Estado uma pequena tax alguns minutos de entretenimento que o Estado pode prover de forma muito barata recursos mantêm as bibliotecas abertas e a iluminação da rua funcionando. Exatar como quando dois países transacionam entre si, as duas partes da transação levam vant

Então, sim, jogue na loteria, se você se diverte jogando. A matemática lhe dá perm

No entanto, há problemas nesse ponto de vista. Eis novamente Pascal, uma op tipicamente morosa sobre a excitação de jogar:

> Este homem passa a vida sem se cansar de jogar todo dia por uma aposta baixa. Dê-lhe toda manhã o dinheiro pode ganhar diariamente, na condição de não jogar; você o deixará infeliz. Talvez se diga que ele busca o divert do jogo, e não ganhar. Faça-o jogar por nada; ele não se empolgará com isso e se sentirá entediado. Então, nã divertimento que ele busca; um divertimento leve e desapaixonado o cansará. Ele precisa se excitar com isso, e s com a fantasia de que ficará feliz em ganhar o que não aceitaria como presente sob a condição de não jogar.[15]

Pascal via os prazeres do jogo como algo desprezível. Desfrutados em excesso, eles p ser prejudiciais. O raciocínio que endossa as loterias também sugere que os negocian metanfetamina e seus clientes desfrutam uma relação ganha-ganha similar. Pode-se d que quiser sobre a metanfetamina, você não pode negar que ela é ampla e sincerar apreciada.[aa]

Que tal outra comparação? Em vez de drogados fissurados, pense em donos de peq negócios, o orgulho dos Estados Unidos. Abrir uma loja ou vender um serviço nã mesma coisa que comprar um bilhete de loteria. Você tem alguma medida de controle seu sucesso. Mas os dois empreendimentos têm algo em comum: para a maioria das pe abrir um negócio é uma aposta ruim. Não importa quanto você acredita que o seu chur seja delicioso, quanto você espera que seu aplicativo seja inovador, quanto você pre que suas práticas comerciais sejam agressivas, quase malignas – você tem muito probabilidade de fracassar que de ter êxito. Essa é a natureza do empreendedorismo pesa uma probabilidade muito, muito pequena de ganhar uma fortuna contra uma p bilidade modesta de ganhar algo que dê para viver, contra uma probabilidade substa mente maior de perder seu dinheiro. Para uma proporção grande de empreende potenciais, quando você espreme os números, o valor financeiro esperado, como o c bilhete de loteria, é menos que zero.

Empreendedores típicos (como fregueses de loteria típicos) superestimam suas ch de sucesso. Mesmo negócios que sobrevivem[16] em geral dão aos seus proprietários n dinheiro do que ganhariam em salário trabalhando numa empresa já existente. No en a sociedade se beneficia de um mundo no qual as pessoas, contrariando um julgar mais sensato, abrem negócios. Queremos restaurantes, queremos barbeiros, queremos nos smartphones. Será o empreendedorismo "um imposto sobre a estupidez"? Você chamado de louco se dissesse isso. Em parte porque nós valorizamos o dono de um ne mais que valorizamos um jogador. É difícil separar nossos sentimentos morais em rel uma atividade dos julgamentos que fazemos sobre sua racionalidade. Mas parte dis

bilhete de loteria, não é medida apenas em dinheiro esperado. O próprio ato de realiz sonho, ou mesmo de tentar realizá-lo, é parte da recompensa.

Em todo caso, foi isso que James Harvey e Yuran Lu decidiram. Depois da que WinFall, mudaram-se para o Oeste e fundaram uma *startup* no Vale do Silício que sistemas de *chat* on-line para empresas. (A página contendo o perfil de Harvey men timidamente "estratégias de investimento não tradicionais" entre seus interesses.) Enq escrevo, eles ainda estão à procura de capital. Talvez consigam. Contudo, se não consegu aposto que você os verá começarem de novo, valor esperado ou não, na esperança de próximo bilhete seja o vencedor.

---

[a] Analistas como Nassim Nicholas Taleb argumentam, de forma persuasiva, em minha opinião, que é um erro fatal probabilidades numéricas a eventos financeiros raros.

[b] Claro que há amplos motivos para acreditar que algumas pessoas dentro dos bancos sabiam que seus investi tinham enorme propensão a naufragar e mentiram a esse respeito. A questão é que *mesmo quando os banque honestos* os incentivos os empurram na direção de assumir riscos estúpidos, com eventual prejuízo do público.

[c] Se você contar os anos bissextos, são 366, mas não vamos ficar preocupados com a precisão.

[d] A primeira pessoa no par pode ser qualquer uma das trinta presentes na sala, e a segunda, qualquer uma das 29 re dando 30 × 29 alternativas; mas isso conta cada par duas vezes, pois conta {Ênio, Beto} e {Beto, Ênio} separadamen o número certo de pares é $(30 \times 29)/2 = 435$.

[e] A menos que tenha ouvido falar de um googolplex; *este*, sim, é um número grande, cara.

[f] Ou pelo menos parecidas com certos tipos de representações óticas das coisas pintadas, nas quais, ao longo d começamos a pensar como realistas; o que conta como "realismo" tem sido sujeito a acaloradas disputas entre crí arte desde que a crítica de arte existe.

[g] É um anacronismo, tudo bem, mas vamos nessa.

[h] Mas e se as retas contendo R forem todas horizontais e as retas contendo P forem todas verticais, o que é a reta q por R e P? É uma reta que não desenhamos, a *reta no infinito*, que contém todos os pontos no infinito e nenh pontos do plano euclidiano.

[i] Para ser justo, há outro sentido no qual o plano de Fano realmente tem aparência de uma geometria mais trad Descartes nos ensinou a pensar em pontos no plano como pares de *coordenadas* x e y, que são números reais. Se v a construção de Descartes, mas desenhar as coordenadas a partir de sistemas numéricos diferentes dos númer você obtém outras geometrias. Se você fizer geometria cartesiana usando o sistema booliano de números,[5] adora cientistas da computação, que possui apenas dois números, os bits 0 e 1, você obtém o plano de Fano. Essa é uma linda, mas não é a que estamos contando no momento. Ver as notas finais para saber mais um pouco.

[j] E *todo* sinal tem ruído, em maior ou menor grau.

[k] *The Emergence of Probability*, de Ian Hacking, inclui de forma magnífica essa história.

[l] Para os que fazem questão dos detalhes técnicos, o que estou descrevendo aqui é na verdade um dual do có Hamming habitual; neste caso, um exemplo de *código de Hamming perfurado*.

[m] Se a palavra de código original *é* 0000000, então a versão com um bit errado tem seis 0 e apenas um 1, dando ao r bastante confiança de que o sinal pretendido era 0000000.

[n] Se você não pensou nisso antes, provavelmente achou que o argumento deste parágrafo é difícil de acompanhar. disso é que você não pode introduzir um argumento desses no seu cérebro simplesmente sentado e lendo – você t pegar uma caneta e tentar anotar um conjunto de quatro pontos que contenha duas retas diferentes no plano de perceber que não consegue e entender por que não conseguiu. Não há outro jeito. Eu encorajo você a escrever diret no livro, se não o pegou emprestado na biblioteca nem o estiver lendo na tela.

[o] Para os entendidos: a distância de Hamming satisfaz a *desigualdade triangular*.

[p] Não é a mesma coisa!

[q] Eu gostaria de pensar que o fato de bebop ser a palavra em Ro para "elástico" é um fragmento não descoberto da secreta do jazz, mas provavelmente é só uma coincidência.

[r] Segundo as Perguntas Mais Comuns em lojban.org, o número de pessoas que sabem falar lojban em nível de conv

[s] Para ser mais preciso, uma esfera é o conjunto de pontos à distância *exata* de 1 do seu centro; o espaço aqui descri esfera preenchida, geralmente é chamado *bola*.

[t] O que vale dizer, à distância de 0 ou 1, uma vez que as distâncias de Hamming, ao contrário das usuais, em geo precisam ser números inteiros.

[u] No entanto, sabemos que os átomos nas formas sólidas de alumínio, cobre, ouro, irídio, chumbo, níquel, platina se arranjam em forma cúbica de face centrada. Mais um exemplo de teoria matemática encontrando aplicações q criadores jamais teriam imaginado.

[v] Embora, em contextos em que os sinais são modelados como sequências de números reais, e não sequências de problema do empacotamento de esferas seja precisamente aquilo de que se precisa para projetar códigos de corr erros.

[w] Cohn trabalha na Pesquisa da Microsoft, que de certa forma é uma continuação do modelo dos Laboratórios matemática pura respaldada por indústria de alta tecnologia, na esperança de beneficiar a ambas.

[x] Mais uma história longa e tortuosa demais para percorrer aqui, mas veja *Symmetry and the Monster*, de Mark Ro

[y] Qual é o sentido, se Shannon provou que uma escolha de código totalmente aleatória deve funcionar igualmen Sim, num certo sentido, mas seu teorema, na forma mais forte, requer que as palavras de código possam ficar tão quanto se desejar. Num caso como esse, em que as palavras de código são fixas num comprimento de 48, você poc o código aleatório com um pouco de cuidado adicional, e foi exatamente o que Denniston fez.

[z] Em termos matemáticos, isso ocorre porque a lista de bilhetes de Denniston forma o que é chamado *sistema de* Em janeiro de 2014, Peter Keevash, jovem matemático de Oxford, anunciou um avanço fundamental, provando a ex de mais ou menos *todos* os possíveis sistemas de Steiner que os matemáticos vêm considerando.

[aa] Não estou inventando esse argumento. Se você quiser examiná-lo na totalidade, veja a teoria do vício racional c Becker e Kevin Murphy.

PARTE IV

# Regressão

Inclui: gênio hereditário; a maldição do Home Run Derby; arranjos elefantes em filas e colunas; bertillonagem; a invenção do gráfico de dispersão; a elipse de Galton; estados ricos votam nos democratas, pessoas ricas votam nos republicanos; "É possível que o câncer de pulmão seja uma das causas do tabagismo?"; por que homens bonit são tão babacas?

# 14. O triunfo da mediocridade

O COMEÇO DA DÉCADA de 1930, como o período atual, foi uma época de introspecção p
comunidade de negócios americana. Alguma coisa tinha dado errado, até aí estava m
claro. Mas que tipo de coisa? A grande crise de 1929 e a subsequente depressão tinham
uma catástrofe imprevisível? Ou a economia americana estaria sistematicamente fura

Horace Secrist estava em posição tão boa quanto qualquer um para responder a
pergunta. Ele era professor de estatística e diretor do Departamento de Pesquisa de Neg
na Northwestern University, especialista na aplicação de métodos quantitativos aos neg
e autor de um livro-texto de estatística amplamente usado por estudantes e execut
Desde 1920, anos antes da crise, ele vinha compilando meticulosamente estatísticas
lhadas sobre centenas de ramos de negócios, desde lojas de equipamentos até ferro
bancos. Secrist tabulava custos, total de vendas, despesas em salários e aluguel, to
qualquer dado que pudesse obter, tentando localizar e classificar as misteriosas vari
que faziam alguns negócios prosperar e outros, fracassar.

Assim, em 1933, quando Secrist estava pronto para revelar os resultados de sua an
os acadêmicos e as pessoas da área empresarial estavam dispostos a ouvi-lo. Principalm
quando ele revelou a surpreendente natureza de seus resultados num volume de 468 pág
ricamente ilustrado com tabelas e gráficos. Secrist não teve papas na língua: intitulo
livro *The Triumph of Mediocrity in Business*.

"A mediocridade tende a prevalecer na condução dos negócios competitivos", esc
Secrist. "Esta é a conclusão para a qual aponta inquestionavelmente este estudo dos c
(despesas) e lucros de milhares de firmas. Este é o preço que cobra a liberdade indu
(comercial)."[2]

Como Secrist chegou a essa conclusão tão nefasta? Em primeiro lugar, ele estratific
negócios em cada setor, segregando cuidadosamente os vencedores (receita alta, c
baixos) dos ineficientes. As 120 lojas de vestuário estudadas por Secrist, por exemplo, f
primeiro classificadas pela relação entre vendas e custos, em 1916, e depois dividida
seis grupos, os "sextis", de vinte lojas cada. Secrist esperava ver as lojas do sextil sup
consolidar seus ganhos ao longo do tempo, destacando-se ainda mais à medida qu
afiando suas habilidades já na liderança do mercado.

O que ele descobriu foi precisamente o contrário. Em 1922, as lojas de vestuário no
superior haviam perdido a maior parte da sua vantagem sobre a loja típica. Ainda
melhores que a média, mas nem de longe eram excepcionais. E mais, o sextil inferio
*piores* lojas – experimentou o mesmo efeito no sentido oposto, melhorando seu desemp

rumo à média. Qualquer que tivesse sido a genialidade que impulsionara as lojas do superior para a excelência no desempenho, ela se esgotara quase inteiramente apen seis anos. A mediocridade triunfara.

Secrist descobriu o mesmo fenômeno em todos os outros setores de negócios. Lo equipamentos e maquinaria voltaram à mediocridade, e o mesmo ocorreu com as me rias, não importava qual o critério de medida empregado. Secrist tentou mensu empresas pela relação entre salários e vendas, entre aluguel e vendas, e qualquer estatística econômica que pudesse ter às mãos. Não importava. Com o tempo, os líder performance começavam a parecer com, e a se comportar como, os membros da comum.

O livro de Secrist chegou como um balde de água fria sobre uma elite de negócios situação desconfortável. Muitos resenhistas viram nos gráficos e tabelas de Secrist a refu numérica da mitologia que sustentava o empreendedorismo. Robert Riegel, da Univers de Buffalo, escreveu:

> Os resultados confrontam o homem de negócios e o economista com um insistente, e em certo grau trágico, pr Ainda que haja exceções para a regra geral, a concepção de uma batalha inicial, coroada com o sucesso para os e eficientes, seguida de um longo período de colheita de recompensas, é meticulosamente dissipada.[3]

Que força estava puxando os casos extremos para o meio? Devia ter algo a ver c comportamento humano, porque o fenômeno não parecia se exibir no mundo na Secrist, com característico detalhismo, havia realizado teste semelhante nas temper médias de julho para 191 cidades dos Estados Unidos. As cidades mais quentes em ainda eram as mesmas em 1931.

Depois de décadas registrando estatísticas e estudando a operação do mundo dos ne americano, Secrist achou que sabia a resposta. Ela estava embutida na natureza da p competição, arrastando para baixo os negócios bem-sucedidos e promovendo os incompetentes. Secrist escreveu:

> Liberdade completa para entrar no ramo de negócios e continuidade da concorrência significam a perpetu mediocridade. Novas firmas são recrutadas entre as relativamente "despreparadas" – pelo menos entre as inexpe Se algumas têm êxito, precisam ir ao encontro das práticas competitivas da classe, do mercado, à qual per Julgamento superior, senso mercantil e honestidade, porém, sempre estão à mercê de inescrupulosos, insensat informados e imprudentes. O resultado disso é que o varejo está superlotado, as lojas são pequenas e inefici volume de negócios é inadequado, os custos relativamente altos, e os lucros, pequenos. Enquanto o campo de at tiver entrada livre – e tem –, enquanto a concorrência é "livre" – e, dentro dos limites sugeridos acima, ela é superioridade nem inferioridade tenderão a persistir. Ao contrário, a mediocridade tende a se tornar a regra. médio da inteligência daqueles que conduzem os negócios é predominante e as práticas comuns a essa ment tornam-se a regra.[4]

Você pode imaginar um professor numa escola de administração de empresas di algo desse tipo hoje? É impensável. No discurso moderno, a concorrência do livre me é a lâmina purificadora que elimina igualmente os incompetentes e os "10% a menos c de competência máxima". Firmas inferiores estão à mercê das melhores, não existe jeito.

Mas Secrist via o livre mercado, com suas firmas de diferentes tamanhos e nív

Deviam-se educar alunos de todas as idades, de diferentes mentalidades e preparo, agrupados juntos numa úni
Isso resultava, obviamente, em pandemônio, falta de estímulo e ineficácia. Depois, o senso comum indicou qu
desejáveis uma classificação, a graduação e o tratamento especial – correções que abriram caminho para a hal
inata de se afirmar e para a superioridade criar resistência a fim de não ser diluída e dissolvida pela inferioridad

A última parte soa um pouquinho – bem, como posso dizer – como "Você con
pensar em alguma *outra* pessoa em 1933 que estivesse falando da importância de
superiores resistindo à diluição por seres inferiores?".

Dado o sabor da visão de Secrist sobre a educação, não surpreende que suas ideias
regressão à mediocridade descendessem das de Francis Galton, cientista britânico do s
XIX que foi pioneiro da eugenia. Galton era o caçula de sete filhos e uma espécie de me
prodígio. Sua enfermiça irmã mais velha, Adèle, assumiu sua educação como pri
entretenimento. Galton era capaz de assinar o nome aos dois anos, e aos quatro já es
cartas como esta: "Eu posso fazer qualquer soma de adição e sei multiplicar por 2, 3, 4
7, 8, 10. E também sei converter de cor as moedas.[a] Leio um pouco de francês e conh
relógio."[6]

Galton começou os estudos de medicina aos dezoito anos, porém, depois que se
morreu deixando-lhe uma fortuna substancial, viu-se de repente menos motivado a s
uma carreira tradicional. Por algum tempo foi explorador, liderando expedições p
interior do continente africano. Mas a publicação histórica de *A origem das espécie*
1859, catalisou uma mudança drástica em seus interesses. Galton recordava-se d
devorado seu conteúdo e o assimilado com a mesma rapidez que os devorou".[7] D
diante, a maior parte do trabalho de Galton foi dedicada à hereditariedade das caracterí
humanas, tanto físicas quanto mentais. Esse trabalho o levou a um conjunto de preferê
políticas que decididamente não são palatáveis do ponto de vista moderno. A Intro
de seu livro de 1869, *Hereditary Genius*, dá o tom:

Proponho-me a mostrar neste livro que as habilidades naturais de um homem derivam da sua herança, exat
com as mesmas limitações que a forma e as características físicas de todo o mundo orgânico. Consequentemen
obstante essas limitações, como é fácil obter por cuidadosa seleção uma raça permanente de cães ou cavalos
de capacidade peculiar de correr, ou fazer qualquer outra coisa, da mesma maneira seria bastante praticável p
uma raça altamente qualificada de homens por meio de casamentos acertados durante diversas gerações conse

Galton defendeu sua opinião num estudo detalhado de homens britânicos
sucedidos, de clérigos a lutadores, argumentando que ingleses notáveis tendem a te
medida desproporcional, parentes notáveis.[b] *Hereditary Genius* encontrou boa do
resistência, em particular no clero. A visão de sucesso mundano puramente naturali
Galton deixava pouco espaço para uma visão mais tradicional da Providência. Especial
penosa era a alegação de Galton de que o sucesso em empreendimentos eclesiásticos
sujeita à influência hereditária; que, como reclamou um resenhista,[8] "um homem pi
sua piedade não tanto (como sempre acreditamos) à ação direta do Espírito Santo e
alma, soprando como o vento onde é escutado, mas ao legado físico terreno, de seu p
uma constituição adaptada às emoções religiosas". Três anos depois, decerto Galton p
os amigos que eventualmente tinha nas instituições religiosas, quando publicou um
artigo intitulado "Statistical inquiries into the efficacy of prayer".

Em contraste, o livro de Galton foi recebido com grande entusiasmo, até com aceitação acrítica por parte da comunidade científica vitoriana. Charles Darwin escre Galton, em meio a um frenesi intelectual, antes mesmo de terminar de ler o livro:

> Down, Beckenham, Kent, S.E.
> 23 de dezembro
>
> Meu caro Galton,
> Li apenas cerca de cinquenta páginas do seu livro (até "Juízes"), mas tenho que respirar um pouco, caso contrá ruim pode se dar dentro de mim. Não acho que alguma vez na vida tenha lido algo mais interessante e orig como você expõe bem e claramente cada ponto! George, que já terminou de ler o livro e se expressou exatame mesmos termos, me diz que os capítulos iniciais não têm nada de interessante quando comparados aos últim levar algum tempo para chegar a esses capítulos, pois o livro me é lido em voz alta pela minha esposa, que tamb muito interessada. Você transformou um oponente em converso, em certo sentido, pois eu sempre susten excetuando os tolos, os homens não diferiam muito em intelecto, apenas em zelo e trabalho árduo; e ainda a essa é uma diferença importante. Eu o parabenizo por produzir aquilo que, estou convencido, irá se mostrar u memorável. Aguardo com intenso interesse cada leitura, mas ela me leva a pensar tanto que a considero um t muito difícil; mas isso é totalmente culpa de meu cérebro, e não de seu estilo lindamente claro.
>
> Sinceramente seu,
> Ch. Darwin

Para ser justo, Darwin pode ter sido tendencioso, sendo primo em primeiro gr Galton. E mais, Darwin acreditava sinceramente que os métodos matemáticos ofer aos cientistas uma visão enriquecida do mundo, ainda que seu próprio trabalho fosse menos quantitativo que o de Galton. Darwin escreveu em suas memórias, refletindo sua educação fundamental:

> Eu tentei a matemática e cheguei a estudar para entrar em Barmouth, durante o verão de 1828, com um p particular (homem muito enfadonho), mas progredi vagarosamente. O trabalho me era repugnante, especialme não ser capaz de ver qualquer significado nos primeiros passos da álgebra. Essa impaciência foi uma tolice, e e posteriores me arrependi profundamente de não ter prosseguido o suficiente para pelo menos compreender coisa dos grandes princípios básicos da matemática, pois os homens assim dotados parecem possuir um sentid

Em Galton, Darwin pode ter sentido que afinal estava vendo o início da bi extrassensorial que ele não estava matematicamente equipado para lançar sozinho.

Os críticos de *Hereditary Genius* argumentavam que, enquanto as tendências heredi eram reais, Galton estava superestimando sua força em relação a outros fatores que afet o desempenho. Então Galton se dispôs a compreender a *extensão* na qual nossa he parental determinava nosso destino. Mas quantificar o caráter hereditário da "geniali não era fácil. Como exatamente mensurar quanto seus ingleses notáveis eram not Decidido, Galton voltou-se para características humanas que pudessem ser disposta mais facilidade numa escala numérica, como a altura. Como Galton e todo mundo já pais altos tendem a ter filhos altos. Quando um homem de 1,85 metro e uma mulher d metro se casam, os filhos e filhas têm propensão a ser mais altos que a média.

Mas agora eis a extraordinária descoberta de Galton: esses filhos *não* têm proper ser tão altos quanto seus pais. O mesmo vale para pais baixos, em sentido contrário - filhos tenderão a ser baixos, mas não tão baixos quanto eles próprios. Galton havia desco o fenômeno que hoje chamamos de *regressão à média*. Seus dados não deixavam dúvi

“Por mais paradoxal que possa parecer à primeira vista”, escreveu Galton em seu liv 1889, *Natural Inheritance*, “teoricamente trata-se de um fato necessário,[c] e um fato claramente confirmado pela observação, de que a estatura do rebento adulto deve s todo, mais *medíocre* que a estatura de seus pais.”

O mesmo deve valer, raciocinou Galton, para o desempenho mental. Isso está de a com a experiência comum: os filhos de um grande compositor, cientista ou líder pc frequentemente sobressaem na mesma área, mas poucas vezes tanto quanto seu i genitor. Galton observava o mesmo fenômeno que Secrist exporia nas operações de neg A excelência não persiste. O tempo passa, a mediocridade se instala.[d]

Mas há uma grande diferença entre Galton e Secrist: Galton era, intimamente matemático, Secrist não era. Assim, Galton compreendeu *por que* a regressão oc enquanto Secrist ficou no escuro.

A altura, entendia Galton, era determinada por alguma combinação de caracterí inatas e forças externas. Estas últimas podiam incluir ambiente, saúde infantil ou sin mente o acaso. Eu tenho 1,82 metro, em parte, porque meu pai tem 1,82 metro, e eu p parte de seu material genético que promove a altura; mas também tive uma alimen razoavelmente nutritiva quando criança e não passei por nenhuma das aflições inco que teriam brecado meu crescimento. Minha altura sem dúvida foi estimulada por sei l outras muitas experiências pelas quais passei dentro do útero e depois de nascer. Pe altas são altas porque sua hereditariedade as predispõe a serem altas, ou porque f externas as estimulam a serem altas, ou ambas as coisas. Quanto mais alta a pessoa, provável é que *ambos* os fatores estejam apontando para cima.

Em outras palavras, pessoas tiradas dos segmentos mais altos da população certamente serão mais altas que sua predisposição genética poderia sugerir. Nasceram bons genes, mas também receberam um impulso do ambiente e do acaso. Seus compartilharão seus genes, mas não há razão para que os fatores externos voltem a con para impulsionar sua altura acima da contribuição da hereditariedade. Em média, por elas serão mais altas que a média das pessoas, mas não excepcionalmente, como seu varapaus. *É isto* que causa a regressão à média, não uma força misteriosa, aman mediocridade, porém a simples atuação da hereditariedade interligada ao acaso. É po que Galton escreve que a regressão à média é “um fato teoricamente necessário”. De i o fato lhe veio como uma característica surpreendente dos dados, mas depois de ter preendido o que se passava, ele viu que não havia possibilidade de ser de outra manei

O mesmo vale para os negócios. Secrist não estava errado em relação às firma tiveram os lucros mais gordos em 1922. É provável que estivessem incluídas en companhias mais bem-administradas de seus setores. Mas também tiveram sorte. C passar do tempo, sua administração pode muito bem ter se mantido superior em sens discernimento. No entanto, as empresas que tiveram sorte em 1922 não possuíam pro lidade maior que as outras de ter sorte dez anos depois. E assim, com o passar dos an companhias do sextil superior começam a cair no ranking.

Na verdade, quase qualquer condição na vida que envolva flutuações aleatórias no t está potencialmente sujeita ao efeito da regressão. Você já experimentou uma nova di

em que resolveu emagrecer. Provavelmente foi um momento no qual o sobe e desce n do seu peso estava no máximo da faixa habitual, porque esses são os tipos de hora e você olha a balança ou sua barriga e diz: "Iiiih!, preciso fazer *alguma* coisa." Mas se o este, então você podia muito bem ter perdido os 2 quilos de qualquer maneira, com o damascos, com sua tendência de voltar ao peso normal. Você descobriu muito pouco a eficácia da dieta.

Você poderia tentar enfrentar o problema com uma amostragem aleatória. Es duzentos pacientes ao acaso, verifique os que estão acima do peso e tente a dieta caras. Você estaria fazendo exatamente o que Secrist fez. O segmento mais pesa população é muito parecido com o sextil superior nos negócios. Com certeza são propensos que a média a apresentar um problema consistente de peso. Mas têm *ta* mais probabilidade de estar no alto de sua faixa de peso no dia em que você os pesa. como as firmas de bom desempenho de Secrist se degradaram com o tempo, ru mediocridade, seus pacientes pesados perderão peso, seja a dieta efetiva ou não. É p que os melhores tipos de pesquisa sobre dieta não se limitam a estudar os efeitos d dieta só, eles comparam duas dietas para ver qual delas leva a maior perda de pe regressão à média deve afetar igualmente cada grupo de participantes de uma dieta, *essa* comparação é justa.

Por que o segundo romance de um escritor iniciante de sucesso, ou o segundo álb uma banda explosivamente popular, raras vezes é tão bom quanto o primeiro? Não p pelo menos não inteiramente, a maioria dos artistas só tem uma coisa a dizer. É por sucesso artístico é um amálgama de talento e fortuna, como tudo o mais na vida, e po está sujeito à regressão à média.[e]

Os *running-backs* – jogadores de futebol americano especialistas em correr com rumo à linha de gol – que assinam contratos de muitos anos tendem a marcar menos por corrida na temporada seguinte à assinatura.[f] Algumas pessoas alegam que é porqu não têm mais incentivo financeiro para se esforçar em busca daquela jarda extra, e fator psicológico provavelmente desempenha algum papel aí. Mas importante tamb que assinaram um grande contrato como resultado de terem tido um ano excepcional bom. Seria esquisito se eles *não* regressassem a um nível mais comum de desempen temporada seguinte.

## "No embalo"

Enquanto escrevo, em abril, começa a temporada de beisebol, quando todo ano s contemplados com um buquê de novas histórias sobre que jogadores estão "no em para realizar algum inimaginável feito de quebra de recorde. Hoje, na ESPN 1, fiquei sa que "Matt Kemp está com um início resplandecente, rebatendo 0,460 e no embalo de c a 86 *home runs*, 210 RBIs[g] e 172 corridas completadas".[10] Esses números de arregalar os (ninguém na história da liga principal de beisebol jamais conseguiu mais do que 73

*runs* numa temporada) são um exemplo típico de falsa linearidade. É como um prol só de palavras: "Se Márcia consegue pintar nove casas em dezessete dias, e ela tem 16 para pintar quantas casas conseguir…"

Kemp rebateu nove *home runs* nos primeiros dezessete jogos dos Dodgers, uma ta $9/17$ *home runs* por jogo. Um algebrista amador poderia escrever a seguinte equação lin

$$H = J \times \left(\frac{9}{17}\right)$$

onde H é o número de *home runs* que Kemp rebaterá na temporada inteira e J o núme jogos do seu time. Uma temporada de beisebol tem 162 jogos. Quando se substitui 162, obtém-se 86 (ou melhor, 85,7647, mas 86 é o número inteiro mais próximo).

No entanto, nem todas as curvas são retas. Matt Kemp não rebaterá 86 *home run* ano. E é a regressão à média que explica por quê. Em qualquer ponto da temporada, e provável que o líder de *home runs* da liga seja um bom rebatedor de *home runs*. De f claro, pelo histórico de Kemp, que existem qualidades intrínsecas nele que o capaci rebater uma bola usando o taco de beisebol com uma força digna de reverência. Mas o da liga em *home runs* também tem boa chance de ter tido sorte. O que significa que qua que seja seu ritmo na liderança, pode-se esperar que ele caia à medida que a temp avança.

Ninguém na ESPN, para ser justo, acha que Matt Kemp irá rebater 86 *home runs*. declarações "no embalo", quando são feitas em abril, geralmente são ditas num tom jocoso: "Claro que não vai, e *se* mantivesse este desempenho?" Contudo, à medida verão vai passando, a língua vai ficando mais e mais comprida, até que no meio da temp as pessoas falam com bastante seriedade sobre usar uma equação linear para proje estatísticas do jogador até o fim do ano.

Mas continua sendo errado. Se há regressão à média em abril, há regressão à méd julho.

Jogadores de bola entendem isso. Derek Jeter, quando insistentemente perguntado estar no embalo de quebrar o recorde de rebatidas na carreira de Pete Rose, disse ao *York Times*: "Uma das piores frases no esporte é 'no embalo de'." Sábias palavras!

Vamos deixar isso menos teórico. Se eu estou liderando a American League em *runs* na época da pausa para o jogo All-Star, quantos *home runs* devo esperar rebat resto do caminho?

O intervalo para o All-Star divide a temporada de beisebol em "primeira meta "segunda metade", mas a segunda metade na verdade é um pouquinho mais curta: em recentes, entre 80% e 90% da primeira metade. Então, você pode esperar que eu reba segunda metade cerca de 85% dos *home runs* que rebati na primeira.[h]

Mas a história diz que essa é a coisa errada a se esperar. Para fazer uma ideia do qu ocorrendo de fato, consultei os líderes de *home runs* da primeira metade da Ame League[11] em dezenove temporadas entre 1976 e 2000 (excluindo os anos reduzido greves e aqueles em que houve empate na liderança da primeira metade.) Apenas três

primeira metade após a pausa. E, para cada um deles, há um rebatedor como M Tettleton, que liderava a liga com 24 *home runs* na pausa do All-Star de 1993 e cons apenas oito no resto da temporada. Os molengões, em média, rebateram apenas 60 *home runs* na segunda metade em relação ao número de rebatidas que lhes valeu a lide na primeira. Esse declínio não se deve à fadiga nem ao calor de agosto. Se assim fosse veria um declínio na produção de *home runs* similarmente grande na liga inteira. É sin mente a regressão à média.

E ela não se restringe somente ao melhor rebatedor de *home runs* na liga. O Hom Derby, que tem lugar todo ano durante a pausa do All-Star, é uma competição em q melhores rebatedores do beisebol competem para rebater o máximo possível de bolas a lua contra um lançador com prática. Alguns rebatedores se queixam de que as conc artificiais do Derby os fazem perder o *timing* e dificultam rebater *home runs* nas ser que se sucedem ao intervalo da temporada: é a maldição do Home Run Derby. O *Wall Journal* publicou uma matéria de tirar o fôlego, "A misteriosa maldição do Home Derby", em 2009, que foi vigorosamente refutada por blogs de beisebol com orien estatística. Isso não impediu o *Journal* de revisitar o mesmo terreno em 2011, co maldição do Grande Derby ataca novamente". Mas não existe maldição. Os participan Derby estão ali porque tiveram um início de temporada incrivelmente bom. A regr exige que sua produção posterior, em média, não se mantenha no embalo que estabelec

Quanto a Matt Kemp, ele lesionou um tendão em maio, perdeu um mês, e era um jo diferente ao voltar. Terminou a temporada de 2012 não com os 86 *home runs* para os estava "no embalo", mas com 23.

Existe alguma coisa que faz a mente resistir à regressão à média. Queremos acr numa força que derruba o poderoso. Não é satisfatório o bastante aceitar o que Gal sabia em 1889: os aparentemente poderosos raras vezes são tão poderosos quanto par

## Secrist encontra seu oponente

Esse ponto crucial, invisível para Secrist, não era tão obscuro para pesquisadores mentalidade matemática mais acurada. Em contraste com as críticas geralmente respe a Secrist, houve a famosa humilhação estatística[12] provocada por Harold Hotelling no *Jo of American Statistical Association* (*Jasa*). Hotelling era de Minnesota,[13] filho de um co ciante de feno, que foi para a faculdade estudar jornalismo e ali descobriu um extraordi talento para a matemática. (Francis Galton, se tivesse ido adiante e estudado a heredi dade de americanos notáveis, teria ficado contente em saber que, apesar da criação hu de Hotelling, seus ancestrais incluíam um secretário da colônia da baía de Massachus um arcebispo de Cantuária.) Como Abraham Wald, Hotelling começou na matemática escrevendo uma dissertação de doutorado em Princeton sobre topologia algébric seguiria adiante para liderar o Grupo de Pesquisa Estatística em Nova York – o mesmo onde Wald explicou ao Exército que devia blindar os locais do avião onde não havia de balas. Em 1933, quando saiu o livro de Secrist, Hotelling era um jovem profess

relação a problemas econômicos. Dizia-se que ele gostava de jogar Banco Imobiliái cabeça; tendo memorizado o tabuleiro e as frequências dos vários cartões de Sc Comunidade, este era um simples exercício de geração aleatória de números e contabil mental. Isso deve dar uma ideia dos poderes mentais de Hotelling e do tipo de coisa d ele gostava.

Hotelling era totalmente dedicado à pesquisa e à geração de conhecimento, e de visto em Secrist algum tipo de parentesco espiritual. "O trabalho de compilação e de direta de dados", escreveu ele com simpatia, "deve ter sido gigantesco."

E aí vem a martelada.[14] O triunfo da mediocridade observado por Secrist, a Hotelling, é mais ou menos automático sempre que estudamos uma variável que é af tanto por fatores estáveis quanto pela influência do acaso. As centenas de tabelas e gr de Secrist "não provam nada além de que as relações em questão têm uma tendên flutuar". O resultado da exaustiva investigação de Secrist é "matematicamente óbvio a de considerações gerais, e não necessita da vasta acumulação de dados aduzidos para p lo". Hotelling demonstra sua questão com uma única e decisiva observação. Secrist acre que a regressão à mediocridade resultava do efeito corrosivo das forças da competiç longo do tempo; a competição levara as lojas do topo da lista em 1916 a se situarem a da média em 1922. Mas o que acontece se você seleciona as lojas com melhor perforn em 1922? Como na análise de Galton, essas lojas provavelmente foram boas e tiveram Se você voltar o relógio para 1916, qualquer que seja, a boa administração intrínsec elas possuem ainda deve estar em vigor, mas a sorte pode ser totalmente diferente. lojas estarão, caracteristicamente, mais perto de medíocres em 1916 do que em 192 outras palavras, se a regressão à média, como pensou Secrist, fosse o resultado natur forças competitivas, essas forças teriam de *trabalhar para trás no tempo, assim como p frente*.

A crítica de Hotelling é polida, porém firme, num tom mais de tristeza que de raiv tenta explicar a um distinto colega, da maneira mais delicada possível, que ele perde anos de sua vida. Mas Secrist não entendeu a dica. A edição seguinte do *Jasa* publico agressiva carta de resposta, apontando algumas compreensões errôneas na crítica de H ling, contudo, de forma geral, uma espetacular demonstração de não ter entendido Secrist insistia novamente que a regressão à mediocridade não era uma mera general estatística, mas algo particular aos "dados afetados por pressão competitiva e co gerencial". A essa altura, Hotelling deixa de ser simpático e diz as coisas sem rodeios. Es ele em resposta:

> A tese do livro, quando corretamente interpretada, é essencialmente trivial. … "Provar" tal resultado matemát meio de um custoso e prolongado estudo numérico de relações de lucros e despesas em muitos tipos de ne análogo a provar a tabuada da multiplicação com arranjos de elefantes em filas e colunas, e aí fazer a mesma co vários outros tipos de animal. A execução, embora talvez interessante e dotada de certo valor pedagógico, nãc contribuição importante nem para a zoologia nem para a matemática.

## O triunfo da mediocridade no tempo de trânsito oral-anal

É difícil culpar Secrist em demasia. O próprio Galton levou uns vinte anos para apre
plenamente o significado da regressão à média, e muitos cientistas posteriores entenc
mal Galton, assim como Secrist. O biometrista Walter F.R. Weldon, que fizera nome
trando que os achados de Galton sobre a variação em traços humanos valiam também
o camarão, disse numa palestra de 1905 sobre o trabalho de Galton:

> Os poucos biólogos que tentaram usar seus métodos deram-se ao trabalho de compreender o processo pelo qua levado a adotá-los. Nós ouvimos constantemente a regressão ser mencionada como uma propriedade peculiar d vivos, em virtude da qual as variações têm sua intensidade reduzida durante a transmissão de pai para filho e a é mantida de acordo com o modelo. Essa visão pode parecer plausível àqueles que simplesmente consideran desvio dos filhos em relação à média é menor que o de seus pais; mas se tais pessoas se lembrassem do fato igua óbvio de que existe também uma regressão de pais em relação a filhos, de modo que pais de crianças anormais d geral são menos anormais que seus filhos, teriam de atribuir essa característica da regressão a uma proprieda pela qual os filhos são capazes de reduzir a anormalidade dos pais, ou então reconhecer a natureza real do fer que estão tentando discutir.[15]

Os biólogos ficam ansiosos para mostrar que a regressão vem da biologia; os teóric administração, como Secrist, querem que ela venha da competição; os críticos literá atribuem à exaustão criativa. Mas não é nada disso. Ela é matemática.

Ainda assim, a despeito das súplicas de Hotelling, de Weldon e do próprio Galt mensagem ainda não foi totalmente absorvida. Não é só a página de esportes do *Wall Journal* que a entende errado. O mesmo ocorre com os cientistas. Um exemplo partic mente vívido vem de um artigo no *British Medical Journal*, em 1976,[16] sobre o tratar da diverticulite com farelo. (Eu tenho idade suficiente para me lembrar de 1976, quan entusiastas da saúde falavam do farelo com o tipo de reverência de que os ácidos g ômega-3 e os antioxidantes hoje desfrutam.) Os autores registraram o "tempo de trá oral-anal" de cada paciente – isto é, a duração de tempo que uma refeição levava no c entre entrada e saída – antes e depois do tratamento com farelo. Descobriram qu último tem efeito notavelmente regularizador.

> Todos aqueles com tempos rápidos desaceleravam para 48 horas; … aqueles com trânsitos médios não mos alteração; … e aqueles com tempos de trânsito lentos tendiam a acelerar para 48 horas. Logo, o farelo tendia a m os trânsitos iniciais tanto lentos como rápidos para um período médio de 48 horas.

Isso é precisamente o esperável se o farelo não tivesse efeito algum. Formulan maneira delicada, todos nós temos nossos dias rápidos e nossos dias lentos, indepenc mente do nosso nível subjacente de saúde intestinal. É provável que um trânsito inus mente rápido na segunda-feira será seguido de um tempo de trânsito mais perto da r na terça, com ou sem farelo.[i]

E aí existe a ascensão e queda do Scared Straight,[j] um programa que levava delinqu juvenis para passeios em prisões onde os detentos os advertiam dos horrores q aguardavam caso não abandonassem imediatamente o comportamento criminoso. C grama original, implantado na Prisão Estadual Rahway, de Nova Jersey, foi exibido documentário ganhador do Oscar, em 1978, e logo gerou imitações em todos os Es Unidos e até em locais distantes como a Noruega. Os adolescentes deliravam com o moral no traseiro que levavam no Scared Straight. Carcereiros e presos adoravam a op

e da sociedade era culpada pela delinquência juvenil. Mais importante, o Scared St funcionava. Um programa representativo, em Nova Orleans, reportou que os particip eram detidos com a metade da frequência anterior após o Scared Straight.

Exceto que não funcionava. Os delinquentes juvenis são como as lojas de desempenho de Secrist: selecionados não ao acaso, mas em virtude de serem os pior sua espécie. A regressão nos diz que os jovens de pior comportamento este ano prov mente ainda terão problemas de comportamento no ano que vem, *mas não tanto ass* declínio na taxa de detenções é exatamente o que seria de esperar se o Scared Straigh tivesse efeito nenhum.

O que não quer dizer que o Scared Straight fosse completamente ineficaz. Quan programa foi submetido a testes aleatórios,[17] com um subgrupo de delinquentes ju selecionados ao acaso passando pelo Scared Straight e então comparados com os j restantes, que não haviam participado, os pesquisadores descobriram que o prog *aumentava* o comportamento antissocial. Talvez devesse se chamar Scared Stupid.

---

[a] Até 1971, a libra esterlina não tinha frações decimais. Ela era dividida em 20 shillings, e cada shilling era dividid pence. Daí a dificuldade de conversão. (N.T.)

[b] Ele se desculpa na Introdução pela omissão de estrangeiros, comentando: "Eu gostaria de ter estudado especialm biografias de italianos e judeus, sendo que ambos parecem ricos em famílias de altas linhagens intelectuais."

[c] Nota técnica, porém importante. Quando Galton diz "necessário", está fazendo uso do fato biológico de que a distr da altura humana é aproximadamente a mesma de geração para geração. Teoricamente é possível não haver regress isso forçaria um aumento na variação, de modo que cada geração teria mais gigantes gigantescos e mais ba diminutos.

[d] É difícil entender como Secrist, que tinha familiaridade com o trabalho de Galton sobre altura humana, co convencer a si mesmo de que a regressão à média era encontrada apenas em variáveis sob controle humano. Quan teoria realmente se assenta no seu cérebro, a evidência contraditória – mesmo a evidência que você já conhece – a se torna invisível.

[e] Esses casos são complicados pelo fato de que os romancistas tendem a melhorar com a prática. O segundo rom F. Scott Fitzgerald (será que você consegue lembrar o nome?) foi bastante ruim comparado com a estreia, *Este paraíso*, porém, quando seu estilo amadureceu, ele mostrou que tinha sobrado um pouco de combustível no tanq

[f] Este fato, com sua interpretação, vem de Brian Burke, da Advanced NFL Stats, cuja exposição clara e atenção rigo bom senso estatístico deve servir de modelo para todas as análises esportivas sérias.

[g] *Home run*: corridas em que o jogador consegue dar a volta em todas as bases antes que a bola seja devolvida (a nem chegando a ser devolvida); RBI (*run battled in*) é a corrida impulsionada, quando a rebatida gera alguma cor estatística é creditada ao rebatedor. (N.T.)

[h] Na realidade, o índice total de *home runs* parece cair ligeiramente na segunda metade, mas isso talvez seja po final da temporada há mais e mais novatos pegando no taco para rebater. Num conjunto de dados consisti rebatedores de *home runs* da elite, os índices de *home runs* da segunda metade e da primeira metade eram igua McCollum e M. Jaiclin, *Baseball Research Journal*, outono 2010).

[i] Os autores fazem menção à existência da regressão: "Ainda que esse fenômeno pudesse ser meramente atri regressão à média, concluímos que o aumento de ingestão de fibra tem ação fisiológica genuína em desacelerar o rápido e acelerar o trânsito lento em pacientes acometidos de diverticulite." De onde vem essa conclusão, à parte farelo, é difícil dizer.

[j] *Scare*: "assustar", "apavorar"; *straight:* "direito", "comportado"; o nome significa algo do tipo "assustar para comportar direito". (N.T.)

# 15. A elipse de Galton

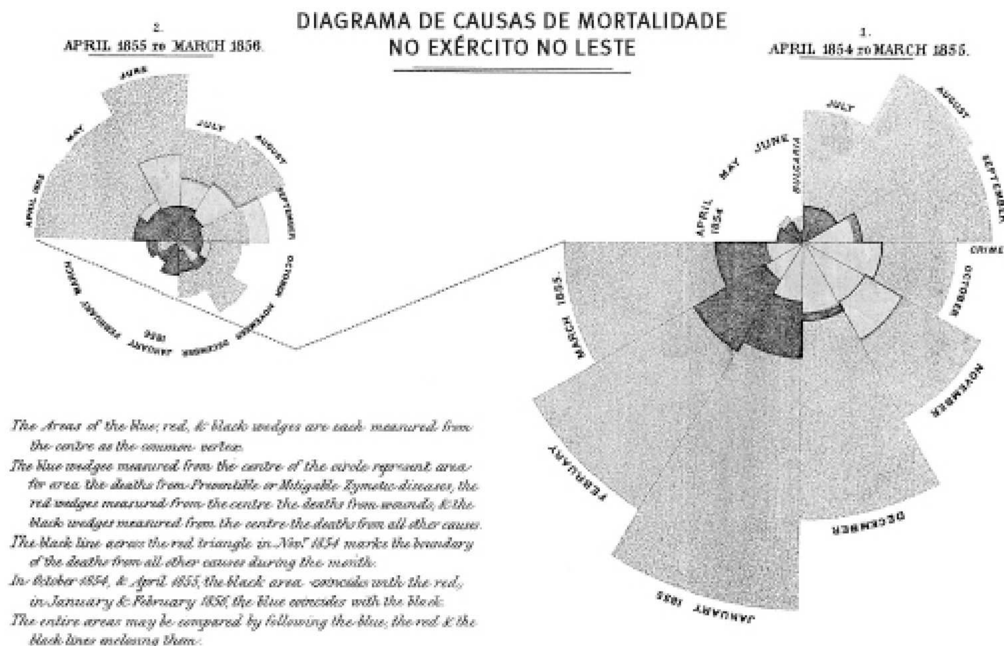
GALTON HAVIA MOSTRADO que a regressão à média atuava sempre que o fenômeno em e
era influenciado pelo jogo das forças do acaso. Mas qual a intensidade dessas forç
comparação com o efeito da hereditariedade?

Para ouvir o que os dados estavam lhe dizendo, Galton teve de colocá-los numa f
gráfica, que lhe revelasse mais que uma coluna de números. Mais tarde ele reco
"Comecei com uma folha de papel quadriculada, com uma escala horizontal no alto,
referência para as estaturas dos filhos, e outra lateral de cima para baixo, para as est
dos pais, e aí punha uma marca a lápis no ponto apropriado da estatura de cada filh
relação à de seu pai."[1]

Esse método de visualizar os dados é o descendente espiritual da geometria analít
René Descartes, que nos pede que pensemos em pontos no plano como pares de nún
uma coordenada *x* e uma coordenada *y*, juntando álgebra e geometria num abraço ape
no qual estão agarradas desde então.

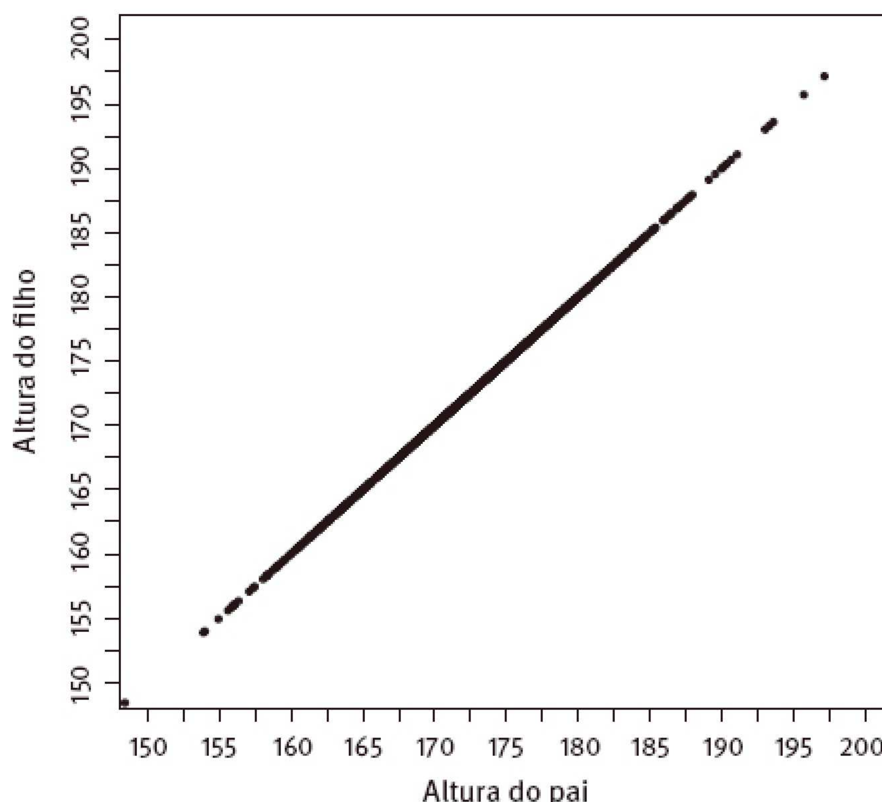
Cada par pai-filho tem um par de números a ele associado, ou seja, a altura do pai se
da altura do filho. Meu pai tem 1,82 metro e eu também – 182 centímetros, cada u
então, se fizéssemos parte do conjunto de dados de Galton teríamos sido anotados
(182,182). E Galton teria registrado nossa existência fazendo uma marca na sua fol
papel com coordenada *x* 182 e coordenada *y* 182. Cada dupla de pai e filho, nos volur
registros de Galton, requeria uma marca diferente no papel, até que, no fim, a folha cont
um vasto chuveiro de pontos representando toda a gama da variação de estatura. G
inventara o tipo de gráfico que hoje chamamos de *gráfico de dispersão*.[a]

Gráficos de dispersão são espetacularmente bons para revelar a relação entre
variáveis. Basta olhar qualquer revista científica contemporânea, e você verá grande
tidade deles. O fim do século XIX foi uma espécie de idade do ouro da visualizaç
dados. Em 1869, Charles Minard fez seu famoso gráfico mostrando o encolhimen
Exército de Napoleão em seu trajeto para a Rússia e a subsequente retirada, muitas
chamado o maior gráfico de dados já feito. Por sua vez, ele descendia do gráfico cox
("crista de galo") de Florence Nightingale,[b] mostrando em termos visuais que a maior
soldados britânicos na Guerra da Crimeia havia sido morta por infecções, e não pelos r



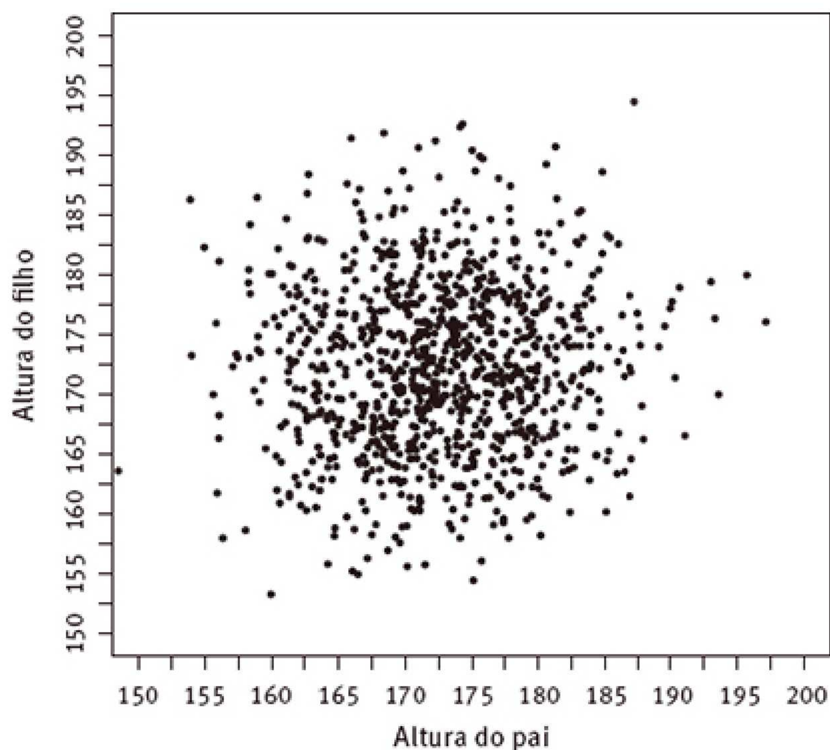

O coxcomb e o gráfico de dispersão jogam com nossos potenciais cognitivos. N cérebro é meio ruim para observar colunas de números, mas absolutamente genial localizar padrões e informações num campo de visão bidimensional.

Em alguns casos, isso é fácil. Por exemplo, suponha que todo filho e seu pai tive alturas *iguais*, como acontece comigo e com meu pai. Isso representa uma situação en o acaso não desempenha nenhum papel, e a sua estatura é completamente determinada seu patrimônio. Todos os pontos no gráfico de dispersão teriam coordenadas $x$ e $y$ i em outras palavras, eles ficariam sobre a diagonal cuja equação é $x = y$.



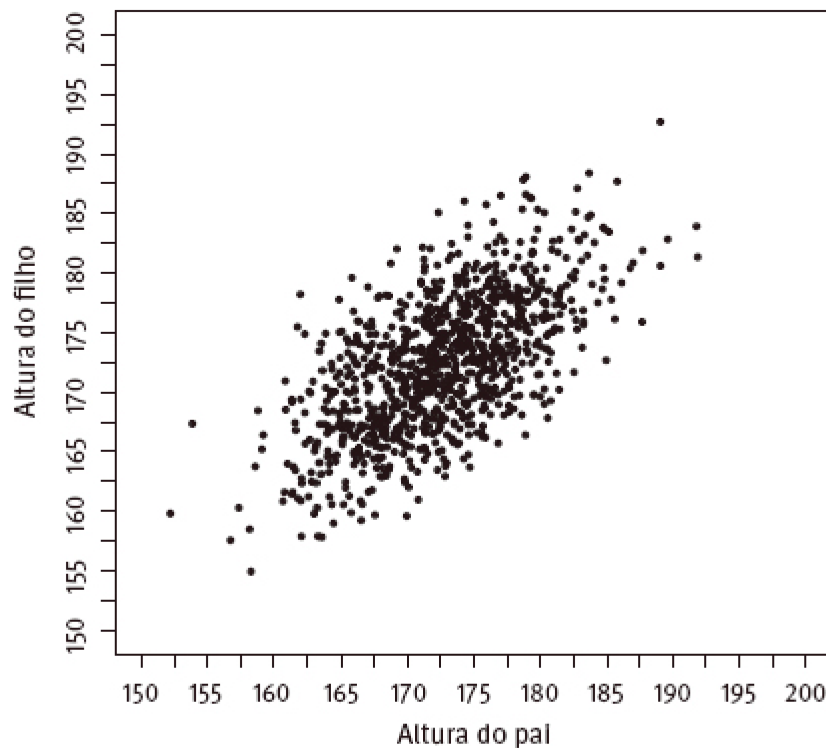
Note que a densidade dos pontos é maior perto do meio e menor perto dos extr
Há mais homens com 1,73 metro (173 centímetros) que com 1,82 metro ou 1,60 metr

E no extremo oposto, quando as alturas de pais e filhos são totalmente independ
Nesse caso, o gráfico de dispersão ficaria mais ou menos assim:

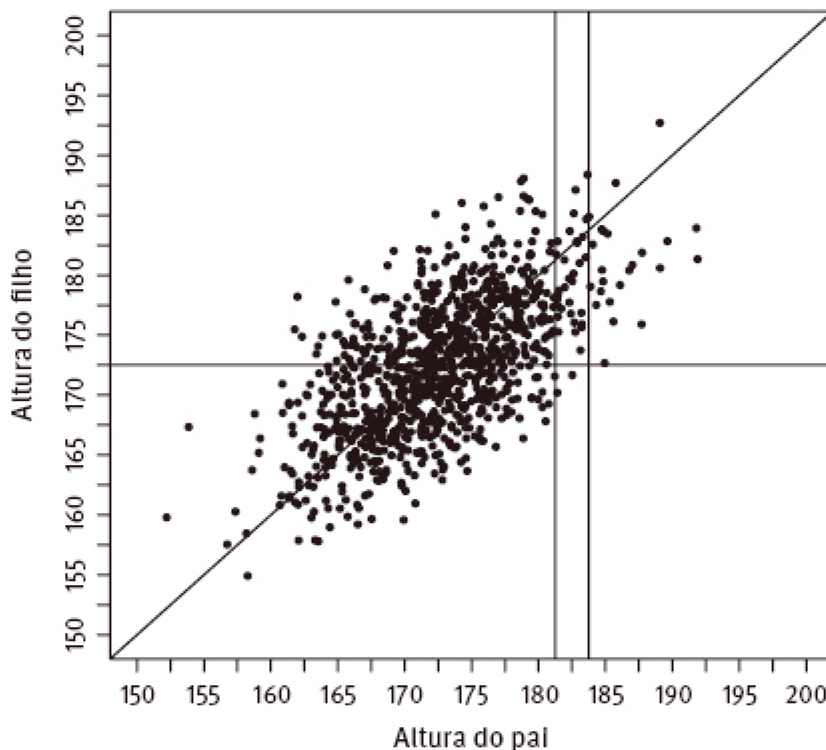



Esse quadro, ao contrário do primeiro, não mostra nenhuma tendência na direç
diagonal. Se você restringir sua atenção aos filhos cujos pais tinham 1,82 metro
centímetros), correspondendo à fatia vertical na metade direita do gráfico, os ponto
medem a altura dos filhos ainda estão centrados em 1,73 metro. Dizemos que a *expec*
*condicional* da altura do filho (isto é, a altura que ele terá em média, dado que seu pai
1,82 metro) é a mesma que a *expectativa incondicional* (a altura média dos filhos comp
sem nenhuma restrição quanto ao pai). É esse o aspecto que teria tido a folha de pa
Galton se não houvesse nenhuma diferença hereditária afetando a altura. É a regres
média na sua forma mais intensa, os filhos de pais altos *regridem todo o caminho* até a
e acabam não sendo mais altos que os filhos dos baixinhos.

Mas o gráfico de dispersão de Galton não tinha o aspecto de nenhum desses dois
extremos. Em vez disso, era algo intermediário:




Qual a posição no gráfico do filho médio de um pai com 1,82 metro? Desenhei uma vertical para mostrar quais pontos do gráfico de dispersão correspondem a esses pares filhos.




Você pode ver que os pontos próximos da fatia do "pai de 1,82 metro" estão concentrados abaixo da diagonal do que acima dela, de modo que os filhos são em mais baixos que os pais. De outro lado, os pontos apresentam claramente uma tendên cair, em sua maioria, acima de 1,73 metro, a altura do homem médio. No conjunto de

mostrados no gráfico, a altura média desses filhos é um pouco abaixo de 1,80 metro:
altos que a média, mas não altos como o pai. Você está olhando para um *quadro* de regı
à média.

Galton logo observou que seus gráficos de dispersão, gerados pela inter-relação
hereditariedade e acaso, tinham uma estrutura geométrica que podia ser qualquer
menos aleatória. Eles pareciam inscritos, mais ou menos, numa elipse, tendo como c
o ponto onde tanto pai quanto filho possuíam a altura média.

A forma de elipse inclinada dos dados fica bastante clara nos dados brutos na t
reproduzida do artigo de Galton intitulado "Regression toward mediocrity in here
stature", de 1886. Veja a figura formada pelas entradas diferentes de zero na tabela a s
A tabela também deixa claro que eu não contei toda a história acerca do conjunto de
de Galton. Por exemplo, sua coordenada *y* não é "altura do pai", mas "a média da altu
pai com 1,08 vez a altura da mãe",[c] o que Galton chamou de "*midparent*", que poc
traduzido livremente como "média do casal de pais".

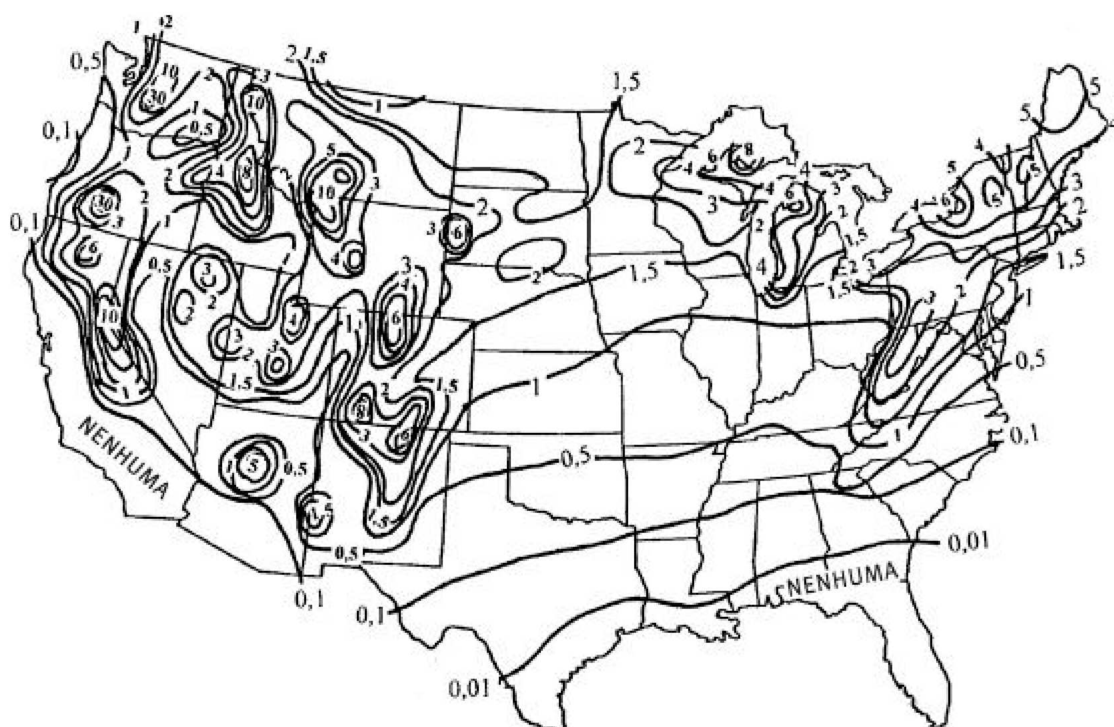
Na verdade Galton fez mais. Com cuidado, ele desenhou curvas no gráfico, ao long
quais a densidade dos pontos era aproximadamente constante. Curvas desse tipo sãc
madas *curvas isopléticas*, que ligam pontos de igual valor (o prefixo latino *iso* significa "
ou "o mesmo"). Essas curvas são bem familiares para você, ainda que você nem se
saiba seu nome. Se você pegar um mapa dos Estados Unidos e desenhar uma curva pass
por todas as cidades onde hoje a temperatura máxima é exatamente 25 graus, 10 gra
qualquer outro valor fixado, obterá as familiares curvas de temperatura num mapa clim
são curvas especiais, chamadas *curvas isotérmicas* ou *isotermas*. Um mapa climático
mente detalhado pode também incluir *curvas isobáricas*, ligando pontos de mesma pı
barométrica, ou curvas *isonéficas*, de igual nebulosidade. Se medirmos a altitude, em v
temperatura, teremos as *curvas de nível*, às vezes também chamadas de *isoípsas*. O m
seguir contém curvas isopléticas que mostram a média anual de tempestades de neve
Estados Unidos:[2]

NÚMERO DE FILHOS ADULTOS DE VÁRIAS ESTATURAS NASCIDOS DE 205 CASAIS DE VÁRIAS ESTATURAS
(Todas as alturas femininas foram multiplicadas por 1,08)

| dos em das | Alturas dos filhos adultos | | | | | | | | | | | | | | Número tota | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Abaixo | 62.2 | 63.2 | 64.2 | 65.2 | 66.2 | 67.2 | 68.2 | 69.2 | 70.2 | 71.2 | 72.2 | 73.2 | Acima | Filhos adultos | C d |
| .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | 1 | 3 | .. | 4 | |
| | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | 1 | 2 | 1 | 2 | 7 | 2 | 4 | 19 | |
| | .. | .. | .. | .. | 1 | 3 | 4 | 3 | 5 | 10 | 4 | 9 | 2 | 2 | 43 | |
| | 1 | .. | 1 | .. | 1 | 1 | 3 | 12 | 18 | 14 | 7 | 4 | 3 | 3 | 68 | |
| | .. | .. | 1 | 16 | 4 | 17 | 27 | 20 | 33 | 25 | 20 | 11 | 4 | 5 | 183 | |
| | 1 | .. | 7 | 11 | 16 | 25 | 31 | 34 | 48 | 21 | 18 | 4 | 8 | .. | 219 | |
| | .. | 3 | 5 | 14 | 15 | 36 | 38 | 28 | 38 | 19 | 11 | 4 | .. | .. | 211 | |
| | .. | 3 | 3 | 5 | 2 | 17 | 17 | 14 | 13 | 4 | .. | .. | .. | .. | 78 | |
| | 1 | .. | 9 | 5 | 7 | 11 | 11 | 7 | 7 | 5 | 2 | 1 | .. | .. | 66 | |
| | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 5 | 5 | .. | 2 | .. | .. | .. | .. | .. | 23 | |
| .. | 1 | .. | 2 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | .. | .. | .. | .. | .. | 14 | |
| .. | 5 | 7 | 82 | 59 | 48 | 117 | 188 | 120 | 167 | 99 | 64 | 41 | 17 | 14 | 928 | |
| .. | .. | .. | 66.3 | 67.8 | 67.9 | 67.7 | 67.9 | 68.3 | 68.5 | 69.0 | 69.0 | 70.0 | .. | .. | .. | |

NOTA: Ao calcular as Medians, as entradas foram tomadas referindo-se ao meio dos quadrados em que estão. A r de os cabeçalhos variarem 62.2, 63.2, …, em vez de 62.5, 63.5, …, é que as observações estão desigualmente distril entre 62 e 63, 63 e 64, e assim por diante, havendo forte tendência em favor de polegadas inteiras.
Após cuidadosa consideração, concluí que os cabeçalhos, conforme adotados, satisfaziam mais as condições. Essa desigualdade não era aparente no caso dos casais de pais.

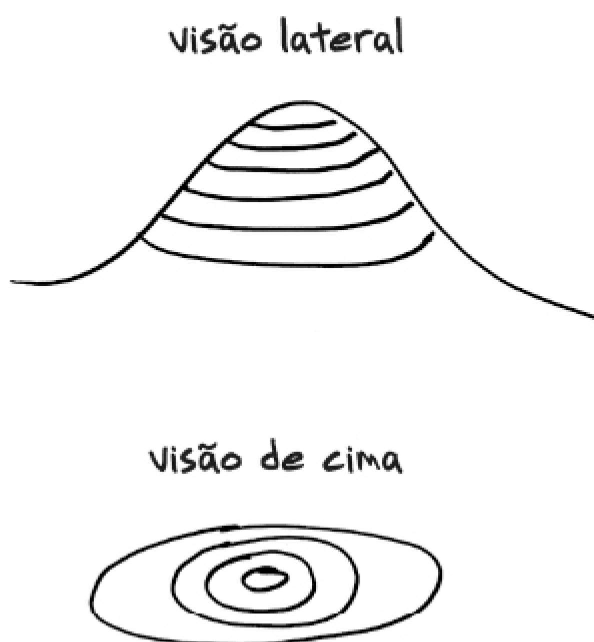
* Optamos por reproduzir a tabela como a original, mantendo os mesmo valores em polegadas, uma vez que o qu importa para o autor é examinar a figura formada pelos dados. O termo "median" provavelmente se refere à "méd não à "mediana" como a utilizamos atualmente. (N.R.T.)




A curva isoplética não foi invenção de Galton. O primeiro mapa de isopléti publicado[3] foi produzido em 1701 por Edmond Halley, o Astrônomo Real Britânico

anuidades.[d] Navegadores já sabiam que o norte magnético e o norte verdadeiro nem se coincidem. Compreender exatamente como e onde as discordâncias apareciam era questão crucial para as viagens oceânicas terem sucesso. As curvas no mapa de Halley *isogônicas*, mostrando aos marinheiros onde as discrepâncias ente o norte magnétic norte verdadeiro eram constantes. Os dados baseavam-se em medições feitas por Ha bordo do *Paramore*, que cruzou diversas vezes o Atlântico com o próprio Halley ao (Esse sujeito realmente sabia como manter-se ocupado no intervalo entre os cometas.

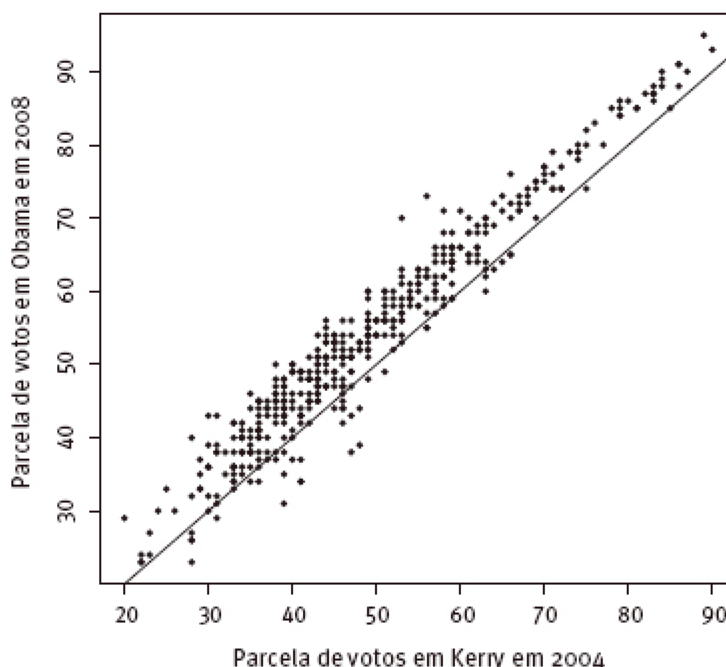
Galton encontrou uma regularidade surpreendente: suas isopléticas eram elipses, contida dentro da seguinte, todas com o mesmo centro. Era como um mapa de nível de montanha perfeitamente elíptica, com o pico no par de alturas observadas com frequência na amostra de Galton: a altura média tanto para pais quanto para filh montanha nada mais é que a versão tridimensional do chapéu de gendarme que De M estudara. Em linguagem atual, nós a chamamos de bivariada de distribuição normal.




Quando a altura do filho não tem a menor relação com a altura dos pais, com segundo gráfico de dispersão examinado, as elipses de Galton são todas círculos, e o g tem um aspecto aproximadamente redondo. Quando a altura do filho é completar determinada pela hereditariedade, sem nenhum elemento de acaso envolvido, com primeiro gráfico, os dados se distribuem ao longo de uma reta, que poderia ser pe como uma elipse que ficou a mais elíptica possível. Entre os extremos, temos elips vários níveis de afilamento. Esse afilamento, que os geômetras clássicos chama *excentricidade* da elipse, é uma medida de quanto a altura do pai determina a do filho. excentricidade alta significa que a hereditariedade é possante e a regressão à média é uma excentricidade baixa significa o contrário, que a regressão à média predomina. G chamou essa medida de *correlação*, termo que ainda usamos. Se a elipse de Galton é redonda, a correlação é próxima de zero; quando a elipse é afilada, alinhada ao long eixo nordeste-sudoeste, a correlação fica próxima de um. Por meio da excentricidade - grandeza geométrica pelo menos tão antiga quanto o trabalho de Apolônio de Per

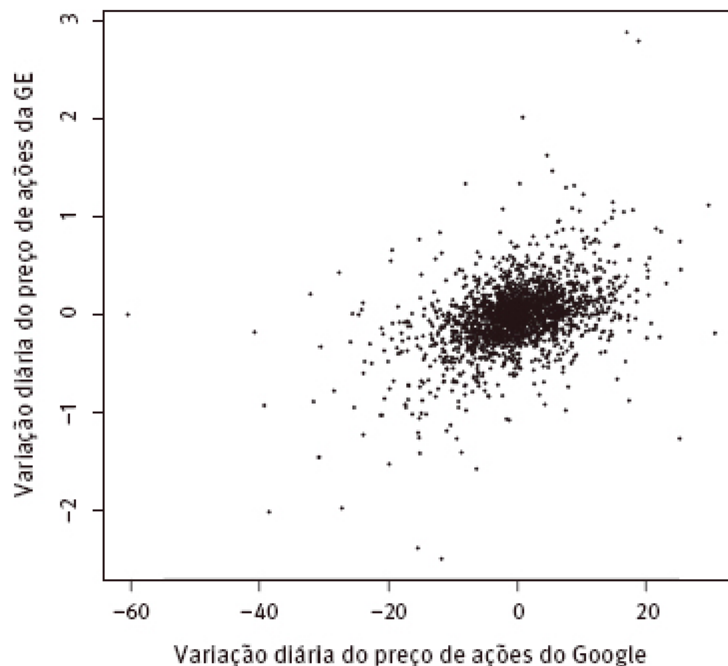
século III AEC – Galton descobrira um modo de medir a associação entre duas variáv
ao fazê-lo solucionara um problema no desenvolvimento da biologia do século X
quantificação da hereditariedade.

Uma atitude cética apropriada agora exige que você pergunte: e se o gráfico de disp
*não* tiver aspecto de elipse? E aí? Há uma resposta pragmática: os gráficos de dispers
conjuntos de dados da vida real frequentemente se distribuem em elipses aproximadas
nem sempre ocorre, mas se dá com frequência suficiente para tornar a técnica amplar
aplicável. Observamos o aspecto que tem o gráfico da parcela de eleitores que votc
John Kerry em 2004 em relação à parcela que Obama obteve em 2008. Cada ponto repre
um único distrito da Câmara:

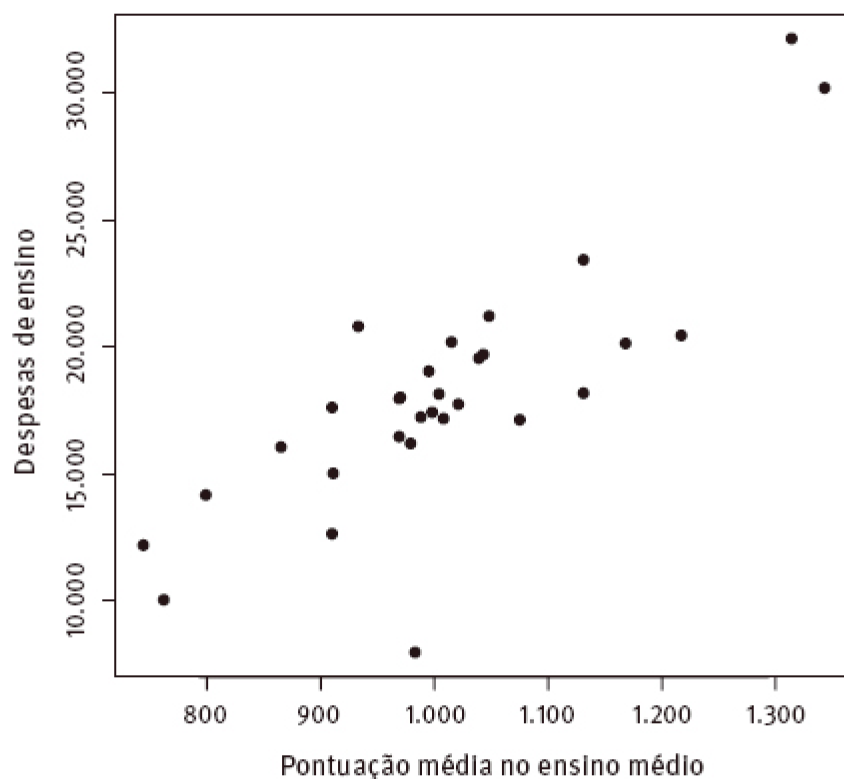



A elipse é clara de se ver, e é bastante afilada. A parcela de votos em Kerry está altar
correlacionada ao voto em Obama. O gráfico flutua visivelmente *acima* da diagonal,
tindo o fato de Obama, de forma geral, ter se saído melhor que Kerry.

Um gráfico de vários anos de variações diárias do preço das ações do Google e c
tem a seguinte aparência:




Eis um quadro que já vimos, a pontuação média em exames do ensino médio em re
a despesas de ensino para um grupo de faculdades da Carolina do Norte:




E aqui estão os cinquenta estados americanos[4] dispostos num gráfico (página segu
de dispersão segundo a renda média e a parcela de votos para George W. Bush na e
presidencial de 2004; os ricos estados liberais, como Connecticut, estão embaixo, do
direito, e os estados republicanos, com recursos mais modestos, estão na parte sup
esquerda.

Esses conjuntos de dados vêm de fontes muito diferentes, mas os quatro gráfic

variáveis é associado a um aumento na outra, e a elipse está disposta de nordeste a sud
No último quadro, a correlação é negativa: em geral, estados ricos tendem a se inclina
os democratas, e a elipse aponta de noroeste para sudeste.




## A eficácia irracional da geometria clássica

Para Apolônio e os geômetras gregos, elipses eram *seções cônicas*: superfícies obtida
tando-se um cone ao longo de um plano. Kepler mostrou (embora a comunidade ast
mica tenha levado algumas décadas para aceitar) que os planetas percorriam órbitas elíp
e não circulares, como se pensava antes. Agora, a mesmíssima curva surge como a 
natural englobando a altura de pais e filhos. Por quê? Não porque haja algum cone 
governando a hereditariedade, e que, quando cortado no ângulo certo, produz as elips
Galton. Nem porque alguma forma de gravidade genética impõe a forma elíptica dos gr
de Galton via leis newtonianas da mecânica.

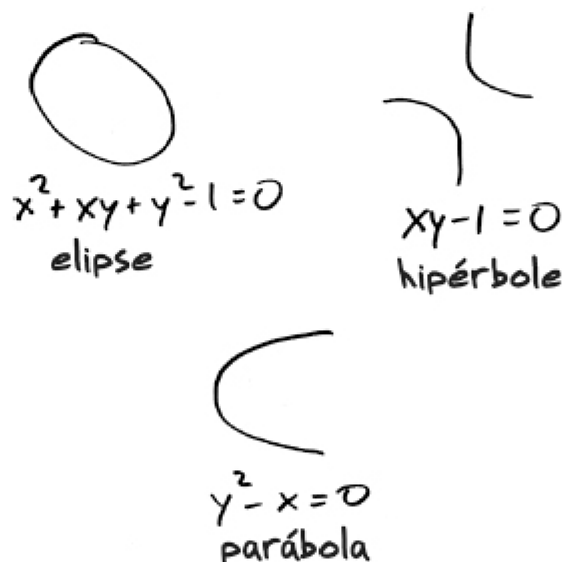
A resposta está numa propriedade fundamental da matemática – em certo sent
mesma propriedade que tem tornado a matemática tão magnificamente útil para os ci
tas. Em matemática há muitos, muitos objetos complicados, e apenas alguns simples. 
se você tem um problema cuja solução admite uma descrição matemática simples, *há a
algumas poucas possibilidades de solução*. As entidades matemáticas mais simples são
tanto ubíquas, forçadas a desempenhar tarefas múltiplas como solução para todos os
de problema científico.

As curvas mais simples são as retas. Está claro que as retas estão por toda par
natureza, desde as arestas dos cristais até as trajetórias de corpos em movimento na aus
de força. As mais simples das curvas *seguintes* são aquelas definidas por equações quád

uma variável ao quadrado, ou multiplicar duas variáveis diferentes, é permitido, mas ( uma variável ao cubo, ou multiplicar uma variável pelo quadrado da outra, é estritar proibido. Curvas dessa classe, inclusive as elipses, ainda são chamadas de seções cônic deferência à história. No entanto, os geômetras algebristas de visão mais progressi chamam de *quádricas*.[g] Há montes de equações quádricas: qualquer uma que tenha a f

$$A x^2 + B xy + C y^2 + D x + E y + F = 0,$$

para alguns valores das seis constantes A, B, C, D, E e F. (O leitor que queira pode ver que nenhum tipo de expressão algébrica é permitido, sujeito à nossa exigência de q podemos multiplicar duas variáveis entre si, jamais três.) Isso parece ser uma porç escolhas – na verdade, infinitas! Mas essas quádricas, se nos ativermos a duas variáve $y$, acabam caindo em três classes principais: elipses, parábolas e hipérboles.[h] [i] Eis a apar delas:




Encontramos essas três curvas repetidas e repetidas vezes como solução de prob científicos, não só nas órbitas dos planetas, mas nos desenhos ideais de espelhos curvo arcos dos projéteis e na forma do arco-íris.

Ou mesmo para além da ciência. Meu colega Michael Harris, distinto teórico dos núr do Institut de Mathématiques de Jussieu, em Paris, tem uma teoria de que três dos prin romances de Thomas Pynchon[5] são governados pelas três seções cônicas: *O arco-í gravidade* é sobre parábolas (todos aqueles foguetes lançados e que caem!); *Mason e L* sobre elipses; e *Contra o dia*, sobre hipérboles. Para mim, essa parece uma teoria organiz desses romances tão boa quanto qualquer outra que eu tenha encontrado. Decerto Pyn que se graduou em física e adora fazer referências em seus romances a fitas de Möl quatérnions, sabe muito bem o que são as seções cônicas.

Galton observou que as curvas por eles desenhadas à mão pareciam elipses, mas nã geômetra o bastante para ter certeza de que era exatamente esta curva a responsável, alguma outra figura de formato mais ou menos ovoide. Estaria ele permitindo que seu c

Não seria o primeiro nem o último cientista a cometer esse erro. Galton, cuidadoso sempre, buscou o conselho de J.D. Hamilton Dickson, matemático de Cambridge. Cl a ponto de ocultar a origem de seus dados, apresentando o problema como se fosse ori da física, para evitar predispor Dickson no sentido de uma conclusão específica. Pa deleite, Dickson rapidamente confirmou que a elipse era não só a curva sugerida dados, mas a curva exigida pela teoria. Escreveu ele:

> O problema pode não ser difícil para um matemático talentoso, mas eu decerto jamais senti um fulgor de lea respeito para com a soberania e o grande alcance da análise matemática como quando sua resposta chegou, confir por puro raciocínio matemático, minhas várias e laboriosas conclusões estatísticas, com muito mais minúcia dc ousara esperar, porque os dados se mostravam um tanto grosseiros, e eu tive de apará-los com delicada cautela.

## Bertillonagem

Galton logo compreendeu que a ideia de correlação não se limitava ao estudo da her riedade; aplicava-se a *qualquer* par de qualidades que pudessem conter alguma relação si.

Acontece que Galton estava de posse de uma maciça base de dados referentes a mec anatômicas, do tipo que estavam na moda no fim do século XIX, graças ao trabal Alphonse Bertillon. Este era um criminologista francês com o espírito muito semelha de Galton. Dedicava-se a uma visão rigorosamente quantitativa da vida humana, con nos benefícios que tal abordagem podia produzir.[j] Em particular, Bertillon estava per pelo modo fortuito e não sistemático com que a polícia francesa identificava suspei crimes. Seria melhor e mais moderno, raciocinou Bertillon, anexar a cada celerado fr uma série de medidas numéricas: comprimento e largura da cabeça, comprimento dos e dos pés, e assim por diante. No sistema de Bertillon, cada suspeito detido era mec seus dados preenchidos em cartões e armazenados para uso futuro. Se o mesmo hc fosse novamente apanhado, identificá-lo era simples questão de pegar o medidor, reg seus números e compará-los com os cartões no arquivo. "Aha, senhor 15-6-56-42, que ia se safar, não é?" Você pode substituir seu nome por um pseudônimo, mas n pseudônimo para o formato da cabeça.

O sistema de Bertillon, tão de acordo com o espírito analítico da época, foi adotad Prefeitura de Polícia de Paris em 1883, e logo se espalhou pelo mundo. No seu au *bertillonagem* tinha domínio sobre todos os departamentos de polícia, de Bucareste a B Aires. "O gabinete de Bertillon", escreveu Raymond Fosdick em 1915, "tornou-se a distintiva da organização policial moderna."[7] No seu tempo, a prática era tão com incontroversa nos Estados Unidos que o juiz Anthony Kennedy a mencionou em sua op majoritária no caso Maryland vs. King, em 2013, permitindo aos estados tirar amost DNA de detidos por assalto à mão armada. Na opinião de Kennedy, uma sequência de era simplesmente mais uma sequência de dados pontuais anexados a um suspeito, espécie de cartão de Bertillon do século XXI.

Galton perguntou-se: seria a escolha de medições de Bertillon a melhor possíve

dentes. Se você já mediu as mãos de um suspeito, será que você realmente precisa ı também os seus pés? Você sabe o que dizem sobre homens de mãos grandes: seu estatisticamente falando, também têm probabilidade de ser maiores que a média. En adição do comprimento dos pés não acrescenta tanta informação ao cartão de Ber quanto seria de esperar. Adicionar mais e mais medições – se forem mal escolhidas – fornecer retornos cada vez mais reduzidos.

Para estudar esse fenômeno Galton fez outro gráfico de dispersão, dessa vez de versus "cúbito",[8] a distância do cotovelo até a ponta do dedo médio. Para sua perplexi viu o mesmo padrão elíptico que surgira a partir da altura de pais e filhos. Mais um ele demonstrara graficamente que as duas variáveis, altura e cúbito, estavam *correlacion* mesmo que uma não determinasse estritamente a outra. Se duas medidas estão altar correlacionadas (como o comprimento do pé esquerdo e comprimento do pé direit pouco sentido em perder tempo registrando os dois números. As melhores medidas a tiradas são aquelas que não estão correlacionadas. E as correlações relevantes poderia computadas a partir da vasta lista de dados antropométricos que Galton já havia colet

Acontece que a ideia da correlação de Galton não resultou em uma melhoria amp sistema de Bertillon. Isso em grande parte se deu por causa do próprio Galton, que def um sistema concorrente, a datiloscopia – o que hoje chamamos de impressões di Como o sistema de Bertillon, as impressões digitais reduziam um suspeito a uma li números ou símbolos que podiam ser marcados sobre um cartão, classificados e arquiv Mas as impressões digitais tinham certas vantagens óbvias; as digitais de um crim muitas vezes estavam acessíveis para medição em circunstâncias nas quais o próprio c noso não se encontrava presente. Esse problema foi vividamente demonstrado pelo ca Vincenzo Peruggia, que roubou a *Mona Lisa* do Louvre, numa ousada ação em plena l dia, em 1911. Peruggia já havia sido preso em Paris, mas seu cartão de Bertillon, devidar registrado, arquivado segundo comprimentos e larguras de suas várias características fi não foi de grande serventia. Tivessem os cartões incluído informação datiloscópi impressões deixadas por Peruggia na moldura descartada da *Mona Lisa* o teriam identif imediatamente.[k]

## Aparte: correlação, informação, compressão, Beethoven

Menti um pouquinho sobre o sistema de Bertillon. Na verdade, ele não registrava o numérico exato de cada característica física, mas apenas se era pequena, média ou gr Quando você mede o comprimento do dedo, divide os criminosos em três grupos: pequenos, dedos médios e dedos grandes. E aí, quando você mede o cúbito, divide cac desses três grupos em três subgrupos, de modo que os criminosos acabam se dividinc nove, ao todo. Ao fazer cinco medições no sistema básico de Bertillon, dividim criminosos em

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$$

grupos, e para cada um desses 243 há sete opções de olho e cor de cabelo. Assim, no Bertillon classificava os suspeitos em $3^5 \times 7 = 1.701$ minúsculas categorias. Quan prendem mais de 1.701 pessoas, algumas categorias inevitavelmente conterão mais c suspeito; mas a quantidade de gente em cada categoria é provavelmente bem peq diminuta o bastante para que um gendarme percorra os cartões e ache uma foto combinando com o homem acorrentado à sua frente. Se você se preocupasse em acresc outras medidas, triplicando o número de categorias toda vez que o fizesse, facilmente c categorias tão pequenas que não haveria dois criminosos – e, sob esse aspecto, dois frar de qualquer tipo – partilhando o mesmo código de Bertillon.

É um artifício hábil acompanhar algo complicado como a forma de um ser humanc uma curta corrente de símbolos. O artifício não se limita à fisionomia humana. Si: semelhante, chamado código de Parsons,[1] é usado para classificar melodias musicai como ele funciona. Pegue uma melodia – uma que todos conheçamos, como "Hino à al de Beethoven, o glorioso final na Nona Sinfonia. Marcamos a primeira nota com u para cada nota posterior, marca-se um dos três símbolos seguintes: **u**, se a nota em qu sobe em relação à nota anterior, **d**, se ela desce, ou **r**, se se repete a nota que veio ant primeiras duas notas do "Hino à alegria" são iguais, então você começa com ˈ**r.** Entãc nota mais alta seguida por outra mais alta ainda: ˈ**ruu.** Em seguida repete-se esta últim mais alta, e aí vem uma sequência de quatro descidas. O código para todo esse segmer abertura é ˈ**ruurdddd**.

Não é possível repetir o som da obra-prima de Beethoven a partir do código de Pa da mesma forma que não se pode esboçar o retrato de um assaltante de bancos a par suas medidas de Bertillon. Mas se você tem um gabinete cheio de músicas categori pelo código de Parsons, a sequência de símbolos faz um belo serviço na identificaç determinada melodia. Se, por exemplo, você tem o "Hino à alegria" na cabeça, mas r lembra do nome, pode entrar num website como a Musipedia e digitar ˈ**ruurdddd**. breve sequência basta para reduzir as possibilidades ao "Hino à alegria" ou *Concertc piano n.12* de Mozart. Se você assobiar para si mesmo meras dezessete notas, há

$$3^{16} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 43.046.721$$

diferentes códigos de Parsons. Isso decerto é mais que a quantidade de melodias já grav e faz com que seja bastante raro duas canções com o mesmo código. Toda vez que adiciona um símbolo novo, está multiplicando o número de códigos por três; e, grac milagre do crescimento exponencial, um código bastante breve lhe dá uma capac estarrecedoramente alta de discriminar duas canções.

Mas há um problema. Voltando a Bertillon, e se descobríssemos que os homen chegam à delegacia de polícia sempre têm cúbitos na mesma categoria que seus d Então, o que parecem ser nove alternativas para as primeiras duas medidas na verdac apenas três: dedo pequeno/cúbito pequeno, dedo médio/cúbito médio, dedo grande/c grande; $\frac{2}{3}$ das gavetas no gabinete de Bertillon ficam vazios. O número total de cate na realidade não é 1.701, e sim meros 567, com uma correspondente redução da

que fazíamos cinco medições, mas, dado que o cúbito combina exatamente com a m informação que o dedo, na realidade fazíamos apenas quatro. É por isso que o núme cartões possíveis é reduzido de $7 \times 3^5 = 1.701$ para $7 \times 3^4 = 567$. (Lembrando que o 7 as possibilidades de cor de cabelo e dos olhos.) Mais relações entre as medidas tornar número efetivo de categorias ainda menor e o sistema de Bertillon ainda mais fraco.

A grande sacada de Galton foi que a mesma coisa se aplica ainda que o comprimer dedo e o comprimento do cúbito não sejam *idênticos*, mas apenas *correlacionados*. Co ções entre as medidas tornam o código de Bertillon menos informativo. Mais uma aguçada percepção de Galton forneceu-lhe uma espécie de presciência intelectual. ( ele captou foi, em forma embrionária, um modo de pensar que viria a ser totalı formalizado apenas meio século depois, por Claude Shannon, na sua teoria da inform Como vimos no Capítulo 13, a medida formal da informação concebida por Shannc capaz de fornecer limites para a rapidez com que bits podiam fluir através de um ruidoso. De forma muito parecida, a teoria de Shannon fornece um meio de caı extensão na qual uma correlação entre variáveis reduz a capacidade de informação c cartão. Em termos modernos diríamos que, quanto mais correlacionadas as medidas, n informação (no sentido exato de Shannon) transmite um cartão de Bertillon.

Hoje, embora Bertillon tenha sumido, a ideia de que a melhor maneira de regis identidade é uma sequência de números adquiriu total predominância. Vivemos mundo de informação digital. E a percepção de que a correlação reduz a quantidade e de informação surgiu como princípio organizador central. Uma fotografia, que costu ser um padrão de pigmentos numa folha de papel quimicamente revestida, agora é sequência de números, cada qual representando o brilho e a cor de um pixel. Uma im captada numa câmera de 4 megapixels é uma lista de 4 milhões de números – o que é capacidade de memória nada pequena para o dispositivo que está batendo a foto. Mas números são altamente correlacionados entre si. Se um pixel é verde brilhante, o vi tem probabilidade de ser também. A informação real contida na imagem é muito infe 4 milhões de números – e é precisamente esse fato que possibilita[m] a *compressão*, a tecnc matemática que permite que imagens, vídeos, músicas e textos possam ser armazenad espaços muito menores do que se poderia imaginar. A presença de correlação to compressão possível. *Realizá-la* envolve ideias muito mais modernas, como a teoı ondaletas (*wavelets*) desenvolvida nas décadas de 1970 e 1980 por Jean Morlet, Stéı Mallat, Yves Meyer, Ingrid Daubechies e outros. A área da sensação comprimida e desenvolvendo muito depressa. Teve início em 2005, com um artigo de Emmanuel Ca Justin Romberg e Terry Tao, e logo se tornou um subcampo ativo da matemática aplic

## O triunfo da mediocridade no clima

Ainda existe uma ponta solta que precisamos amarrar. Vimos como a regressão à ı explica o "triunfo da mediocridade" que Secrist descobriu. E quanto ao triunfo da m cridade que Secrist *não* observou? Quando registrou as temperaturas das cidades am

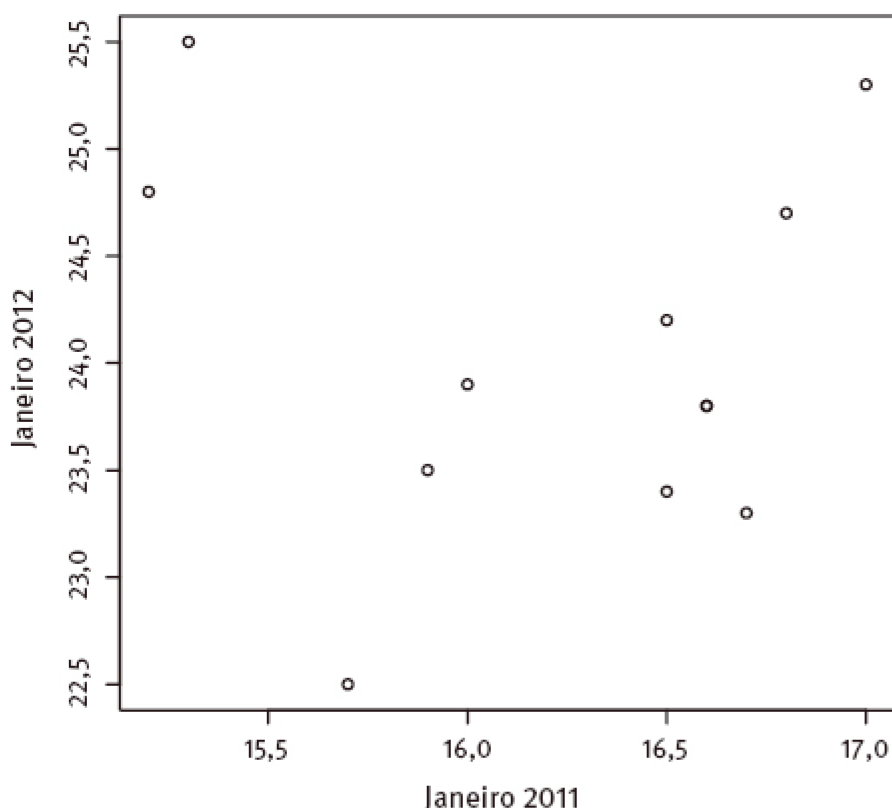
negócios era algo específico da conduta humana. Se a regressão à média é um fenô universal, por que as temperaturas também não a seguem?

A resposta é simples. Seguem, sim.

A tabela a seguir mostra as temperaturas médias em janeiro, medidas em Fahrenheit, em treze estações de clima no sul de Wisconsin, sendo que duas delas não a mais de uma hora de carro uma da outra.[n]

| | **Jan 2011** | **Jan 2012** |
|---|---|---|
| Clinton | 15,9 | 23,5 |
| Cottage Grove | 15,2 | 24,8 |
| Fort Atkinson | 16,5 | 24,2 |
| Jefferson | 16,5 | 23,4 |
| Lake Mills | 16,7 | 24,4 |
| Lodi | 15,3 | 23,3 |
| Aeroporto de Madison | 16,8 | 25,5 |
| Arboreto de Madison | 16,6 | 24,7 |
| Madison, Charmany | 17,0 | 23,8 |
| Mazomanie | 16,6 | 25,3 |
| Portage | 15,7 | 23,8 |
| Richland Center | 16,0 | 22,5 |
| Stoughton | 16,9 | 23,9 |

Quando se faz um gráfico de dispersão no estilo de Galton dessas temperaturas, em geral que as cidades de temperaturas mais altas em 2011 tendiam a ter tambe temperaturas mais altas em 2012.



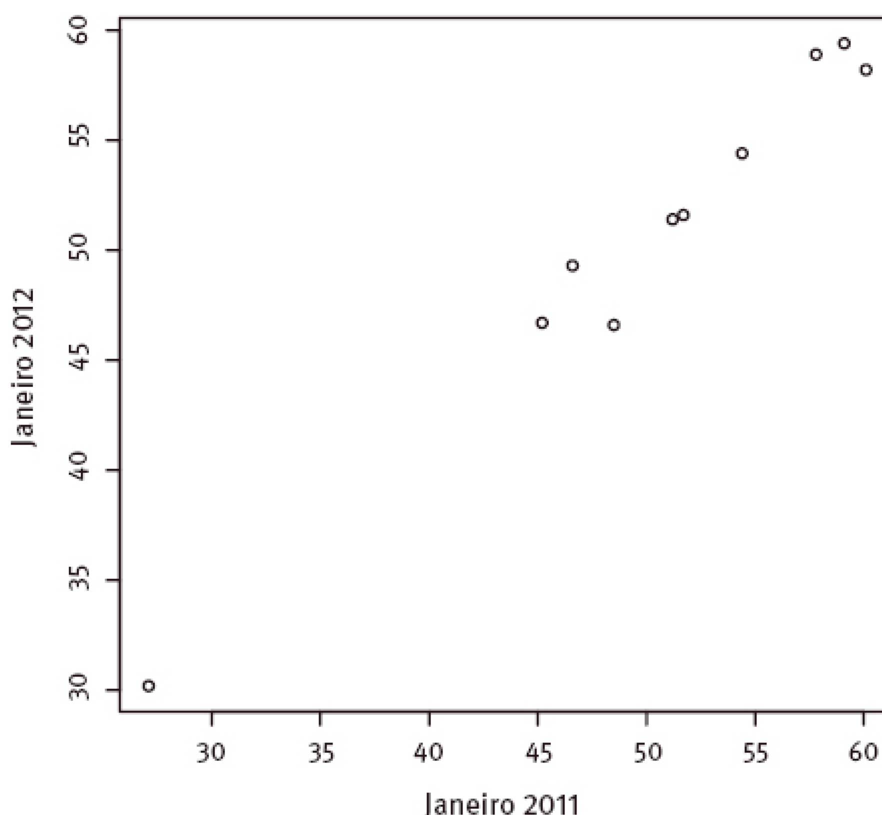
Mas as três estações de temperaturas mais altas em 2011 (Charmany, aeropor Madison e Stoughton) acabaram sendo: a mais quente, a sétima mais quente e a oitava quente em 2012. Ao mesmo tempo, as três estações mais frias em 2011 (Cottage Grove e Portage) tiveram temperaturas relativamente mais altas. Portage empatou como a q mais fria, Lodi era a segunda mais fria e Cottage Grove, em 2012, esteve na realidade quente que a maioria das outras cidades. Em outras palavras, os grupos “mais que “mais frio” moveram-se em direção ao meio, exatamente como as lojas de equipament Secrist.

Por que Secrist não viu esse efeito? Porque escolheu suas estações de clima de ma diferente. Suas cidades não se restringiam a um pequeno punhado no Meio-Oeste estavam muito mais espalhadas. Suponha que observemos as temperaturas de janei região da Califórnia, em vez de Wisconsin:[o]

| | Jan 2011 | Jan 2012 |
|---|---|---|
| Eureka | 48,5 | 46,6 |
| Fresno | 46,6 | 49,3 |
| Los Angeles | 59,2 | 59,4 |
| Riverside | 57,8 | 58,9 |
| San Diego | 60,1 | 58,2 |
| São Francisco | 51,7 | 51,6 |
| San Jose | 51,2 | 51,4 |
| San Luis Obispo | 54,5 | 54,4 |
| Stockton | 45,2 | 46,7 |
| Truckee | 27,1 | 30,2 |

Não se vê nenhuma regressão. Os lugares frios, como Truckee, no alto da Serra Ne continuam frios, e os lugares quentes, como San Diego e Los Angeles, continuam qu Se pusermos essas temperaturas num gráfico de dispersão, obtemos um quadro bem rente (ver tabela a seguir).

A elipse galtoniana em torno desses pontos seria realmente muito estreita. As difer que você vê nas temperaturas na tabela refletem o fato de que alguns lugares na Calif são simplesmente mais frios que outros, e as diferenças subjacentes entre as cidades s pujam a possibilidade de flutuação de ano para ano. Na linguagem de Shannon, diri que há montes de sinais e não tanto ruído. Para as cidades do centro-sul de Wisconsi o contrário. Climaticamente falando, Mazomanie e Fort Atkinson não são muito difer Num dado ano, a posição dessas duas cidades no ranking de temperatura terá muito com o acaso. Há montes de ruído e nem tanto sinal.




Secrist julgou que a regressão que documentara meticulosamente fosse uma nova física dos negócios, algo que levaria mais certeza e rigor para o estudo científico do com Contudo, era exatamente o contrário. Se os negócios fossem como as cidades da Calif – algumas realmente quentes, outras realmente não, refletindo diferenças inerentes à p dos negócios –, você veria, de modo correspondente, menos regressão à média. O q achados de Secrist realmente mostram é que os negócios são muito mais como as ci de Wisconsin. Administração superior e percepção comercial realmente desempenhar papel, como também o mero acaso, em medida mais ou menos igual.

## Eugenia, pecado original e o título enganoso deste livro

Num livro chamado *O poder do pensamento matemático: a ciência de como não estar e* é um pouco estranho escrever sobre Galton sem falar sobre sua fama entre os não ma ticos: a teoria da eugenia, cuja paternidade lhe é atribuída. Se, como eu alego, a atençã o lado matemático da vida ajuda a evitar erros, como pôde um cientista como Galto visão tão clara em relação a questões matemáticas, estar tão errado sobre os méritos criarem seres humanos segundo propriedades desejáveis? Galton qualificava suas opi sobre o assunto de modestas e sensatas, mas elas chocam os ouvidos contemporâneos

> Como na maioria dos outros casos de opiniões novas, a concepção errônea dos objetores à eugenia tem sido As representações erradas mais comuns são de que seus métodos devem ser totalmente os de uniões compu como na criação de animais. Não é assim. Acho que a compulsão rígida deve ser exercida para impedir a livre prop do rebanho daqueles que são seriamente afligidos por demência, debilidade mental, criminalidade habitual e pa mo, mas isso é bem diferente de casamento compulsório. Como restringir casamentos malpressagiados é uma em si mesma, se isso deve ser efetivado por isolamento, ou de outras maneiras a serem ainda divisadas, qu

mas o populacho ainda precisa ser ensinado acerca do real estado dessas coisas. Uma democracia não pode re menos que seja composta de cidadãos capazes; portanto, em autodefesa, deve resistir à livre introdução de esp degenerados.[9]

O que posso dizer? Matemática é um jeito de não estar errado, mas não é um je não estar errado *em relação a tudo*. (Sinto muito, não há devolução do dinheiro!) errado é como o pecado original. Nós nascemos com ele e ele continua conosco necessária uma vigilância constante se pretendemos restringir sua esfera de influência nossas ações. Há um perigo real de que, fortalecendo nossas habilidades de analisar alg questões matematicamente, adquiramos uma confiança geral em nossas crenças q estenda injustificadamente àquelas coisas em relação às quais ainda estamos errados namo-nos como aquelas pessoas religiosas que, com o tempo, acumulam um senso tão de seu próprio virtuosismo que as leva a acreditar que as coisas ruins que fazem tan são virtuosas.

Farei o meu melhor esforço para resistir a essa tentação. Mas fiquem de olho em m

## As aventuras de Karl Pearson através da décima dimensão

É difícil exagerar o impacto da criação da correlação, por Galton, sobre o mundo conc que agora habitamos – não só em estatística, mas em cada área do empreendir científico. Se você sabe alguma coisa sobre a palavra *correlação* é que "correlação não in causalidade" – dois fenômenos podem ser correlacionados, no sentido de Galton, m que um não cause o outro. Isso, em si, não era novidade. As pessoas certamente enter que irmãos têm uma probabilidade maior que outros pares de pessoas de compar características físicas, e isso não ocorre porque irmãos altos fazem as irmãs mais serem altas também. Contudo, ainda assim existe uma relação causal à espreita lá no f os pais altos cuja contribuição genética ajuda em fazer com que todos os filhos sejam No mundo pós-Galton, poder-se-ia falar sobre uma associação entre duas variáveis e permanecer completamente agnóstico em relação à existência de *qualquer* relação c específica, direta ou indireta. A seu modo, a revolução conceitual que Galton enger tem algo em comum com o insight de seu primo mais famoso, Charles Darwin, que mo que se podia falar significativamente sobre progresso sem necessidade de invoca propósito. Galton mostrou que se podia falar significativamente sobre associação necessidade de se invocar uma causa subjacente.

A definição de correlação original de Galton era um tanto limitada, aplican unicamente àquelas variáveis cuja distribuição seguia a lei da curva do sino que vim Capítulo 4. Mas a noção logo foi adaptada e generalizada por Karl Pearson,P para ser apl a qualquer variável possível.

Se eu fosse escrever agora a fórmula de Pearson, ou saísse procurando por ela, veria bagunça de raízes quadradas e frações que, a menos que você tenha a geometria carte na ponta da língua, não seria muito esclarecedora. Na verdade, a fórmula de Pearson uma descrição geométrica bastante simples. Os matemáticos, desde Descartes, têm d

geométricas do mundo. A vantagem da álgebra é que é mais fácil formalizar e digitar computador. A vantagem da geometria é que ela nos permite mobilizar nossa intuição para encarar a situação, em particular quando se pode fazer um desenho. Poucas vezes que *realmente* entendo uma peça matemática até saber do que se trata em term linguagem geométrica.

Então, para um geômetra, o que é correlação? Vai ajudar se tivermos um exemplo à Olhe novamente a tabela que lista as temperaturas médias de janeiro em dez cidad Califórnia em 2011 e 2012. Como vimos, as temperaturas de 2011 e 2012 têm uma correlação positiva. Na verdade, a fórmula de Pearson fornece um valor estratosféri 0,989.

Se quisermos estudar a relação entre medidas de temperatura em dois anos difer não importa se modificamos cada entrada na tabela de um mesmo valor. Se a tempe de 2011 é correlacionada com a de 2012, é igualmente correlacionada com "temperatu 2012 + 5 graus". Dizendo de outra maneira, se você pegar os pontos no diagram temperaturas e movê-los dez centímetros para cima, isso não altera o formato da eli Galton, somente sua localização. Acontece que é proveitoso deslocar as temperaturas a de um valor uniforme para tornar o valor médio igual a *zero* tanto em 2011 quanto em Fazendo isso, obtém-se uma tabela assim:

| | **Jan 2011** | **Jan 2012** |
|---|---|---|
| Eureka | −1,7 | −4,1 |
| Fresno | −3,6 | −1,4 |
| Los Angeles | 9,0 | 8,7 |
| Riverside | 7,6 | 8,2 |
| San Diego | 9,9 | 7,5 |
| São Francisco | 1,5 | 0,9 |
| San Jose | 1,0 | 0,7 |
| San Luis Obispo | 4,3 | 3,7 |
| Stockton | −5,0 | −4,0 |
| Truckee | −23,1 | −20,5 |

As linhas da tabela têm valores negativos para cidades frias como Truckee e va positivos para lugares mais quentes como San Diego.

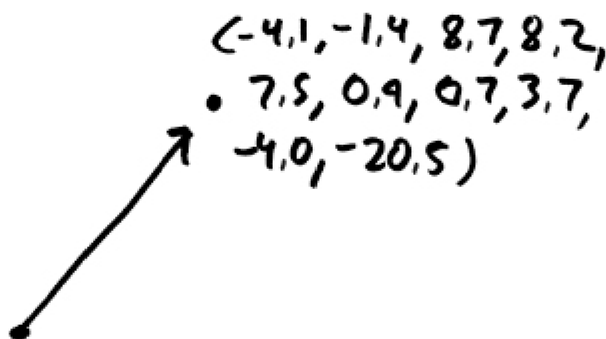
Agora vem o artifício. A coluna de dez números que acompanha as temperaturas de é uma lista de números, sim. Mas também é um *ponto*. Como assim? Isso remonta a herói, Descartes. Você pode pensar num par de números $(x,y)$ como um ponto no pla unidades para a direita e $y$ unidades para cima da origem. Na verdade, você pode des uma pequena seta apontando da origem para nosso ponto $(x,y)$, uma seta chamada *ve*



Do mesmo modo, um ponto no espaço tridimensional é descrito por uma lista d coordenadas (*x*,*y*,*z*). E nada, exceto o hábito e um medo covarde, nos impede de fo barra mais ainda. Uma lista de quatro números pode ser pensada como um ponto espaço quadridimensional, e uma lista de dez números, como as temperaturas da Calif na nossa tabela, é um ponto num espaço decadimensional, ou dez-dimensional. M ainda, pense nele como um vetor dez-dimensional.

Espere aí, você pode perguntar: como devo pensar nisso? Qual o jeitão de um veto dimensional?

O jeitão é este:

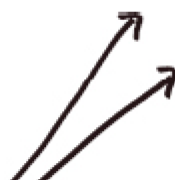



Esse é o segredinho sujo da geometria avançada. Pode parecer impressionante faze geometria em dez dimensões (ou cem, ou 1 milhão…), mas as figuras mentais que t na cabeça são bi, no máximo tridimensionais. Isso é tudo que a nossa cabeça pode mani Felizmente, essa visão empobrecida em geral é suficiente.

Geometria de dimensões superiores pode parecer um pouco misteriosa, especialı porque o mundo em que vivemos é tridimensional (ou quadridimensional, se você c o tempo, ou talvez 26-dimensional, se você é um certo tipo de adepto da teoria das co mesmo assim, porém, você acha que o Universo não se estende muito além da m dessas dimensões). Por que estudar geometria se ela não é realizada no Universo?

Uma resposta vem do estudo dos dados, que neste momento está super na moda. Lei se da foto digital tirada com a câmera de quatro megapixels: ela é descrita com 4 milhõ números, um para cada pixel. (E isso antes de levarmos em conta a cor!) Essa imagem vetor 4-milhões-dimensional, ou, se preferir, um ponto num espaço 4-milhões-dimens Uma imagem que varia com o tempo é representada por um ponto que se *move atra* um espaço 4-milhões-dimensional, traçando uma curva num espaço 4-milhões-dime nal, e, antes que você perceba, está fazendo cálculo 4-milhões-dimensional, e é a realmente começa a graça.

Voltando à temperatura. Há duas colunas na nossa tabela, cada qual nos fornecend vetor bidimensional. O aspecto é este:



Esses dois vetores apontam aproximadamente na mesma direção, o que reflete o fa que as duas colunas não são tão diferentes. Como já vimos, as cidades mais frias em continuaram frias em 2012; idem para as mais quentes.

Essa é a fórmula de Pearson em linguagem geométrica. A correlação entre as variáveis é determinada pelo *ângulo* entre os dois vetores. Se você quer detalhes trigon tricos, a correlação é o cosseno do ângulo. Não importa se você lembra o que sig cosseno, basta saber que o cosseno de um ângulo é 1 quando o ângulo é 0 (isto é, quan dois vetores estão apontando para o mesmo sentido) e −1 quando o ângulo é de 180 (vetores apontando em sentidos opostos). Duas variáveis são positivamente correlacio quando os vetores correspondentes são separados por um ângulo agudo – ou seja ângulo menor que 90 graus –, e negativamente correlacionadas quando o ângulo en vetores é maior que 90 graus, ou obtuso. Isso faz sentido: vetores em ângulo agudo er estão, em termos informais, "apontando no mesmo sentido", enquanto vetores que for um ângulo obtuso parecem trabalhar com propósitos opostos.

Quando o ângulo é *reto*, nem agudo nem obtuso, as duas variáveis têm uma corre zero; no que diz respeito à correlação, elas não estão relacionadas entre si. Em geom dizemos de um par de vetores que formam um ângulo reto que eles são perpendicular ortogonais. Por extensão, é prática comum entre os matemáticos e outros aficionad trigonometria usar a palavra "ortogonal" para referir-se a alguma coisa que não tem re com o assunto em pauta – "Poder-se-ia esperar que habilidades matemáticas estive associadas a magnífica popularidade, mas minha experiência mostra que as duas coisa ortogonais". Aos poucos, esse uso está se desvencilhando do dialeto nerd e penetran linguagem mais geral. Pode-se ver isso num recente argumento na Suprema Cort Estados Unidos.[10]

Sr. Friedman: Acho que esse assunto é inteiramente ortogonal à questão aqui, porque a Commonweal reconhecendo…
Presidente da Suprema Corte, juiz Roberts: Desculpe. Inteiramente o quê?
Sr. Friedman: Ortogonal. Ângulo reto. Sem relação. Irrelevante.
Juiz Roberts: Ah!
Juiz Scalia: Que adjetivo foi esse? Gosto dele.
Sr. Friedman: Ortogonal.
Juiz Scalia: Ortogonal?
Sr. Friedman: Certo, certo.
Juiz Scalia: Ah!
(*Risos*.)

Eu estou torcendo para ortogonal pegar. Já faz algum tempo desde que uma palavr matemática abriu caminho para entrar no inglês popular. *Mínimo denominador comu* essa altura perdeu quase inteiramente seu sabor matemático, e *exponencialmente*… nã quero nem começar a falar no *exponencialmente*.[q]

A aplicação da trigonometria a vetores de dimensão superior com o objetivo de quan correlação não é, para falar delicadamente, o que aqueles que desenvolveram o co tinham em mente. Hiparco, astrônomo de Niceia que anotou as primeiras tábuas trig

vetores com os quais lidava descreviam objetos no céu e eram solidamente tridimensi Mas uma ferramenta matemática que serve exatamente bem para um propósito tend mostrar útil muitas outras vezes.

A compreensão geométrica da correlação ilumina aspectos da estatística que de modo poderiam ficar obscuros. Considere o caso do rico liberal elitista. Já há algum t esse sujeito ligeiramente vexaminoso se tornou personagem familiar no pontificado po Talvez seu mais devotado cronista seja David Brooks, que escreveu um livro inteiro um grupo que ele chamou de Bohemian Bourgeoisie – ou Burguesia Boêmia –, ou Em 2001, contemplando a diferença entre o afluente e suburbano condado de Montgo em Maryland (o lugar onde nasci!), e o condado de Franklin, na Pensilvânia, bem média, ele especulou que a velha estratificação política segundo a classe econômica, GOP (Good Old Party, o "Bom e Velho Partido", como se referem ao Partido Republi nos Estados Unidos) representando os ricaços e os democratas representando a trabalhadora, estava terrivelmente obsoleta.

> Como áreas privilegiadas em toda parte, desde o Vale do Silício até a costa norte de Chicago e o Connecticut sub o condado de Montgomery apoiou a chapa democrata na última eleição presidencial por uma margem de 63% Ao mesmo tempo, o condado de Franklin foi republicano, 67% a 30%.[11]

Antes de tudo, esse "em toda parte" é um pouco forte. O condado mais rico de Wisc é Waukesha, nos elegantes subúrbios a oeste de Milwaukee. Ali Bush esmagou Gore 31, enquanto Gore ganhou no estado por uma estreita margem.

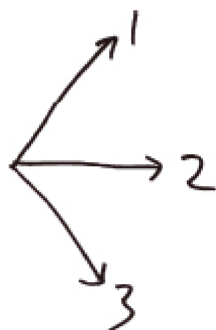
Ainda assim, Brooks está indicando um fenômeno real, que vimos retratado com ba clareza num gráfico de dispersão, algumas páginas atrás. Na paisagem eleitoral conte rânea dos Estados Unidos, os estados ricos têm maior probabilidade que os pobres de nos democratas. Mississippi e Oklahoma são fortalezas republicanas, enquanto o GO se dá ao trabalho de disputar Nova York e Califórnia. Em outras palavras, ser de um e rico está correlacionado positivamente a votar nos democratas.

Mas o estatístico Andrew Gelman descobriu[12] que a história é mais complicada q retrato brooksiano de uma nova raça de liberais tomadores de *latte*, que gostam de Toyotas Prius, têm casas enormes e de bom gosto e bolsas de marca cheias de dinhei verdade, gente rica ainda tem maior probabilidade de votar nos republicanos que os p efeito que tem estado presente há décadas nos Estados Unidos. Gelman e seus colabora escavando mais fundo os dados estado por estado, descobriram um padrão muito in sante. Em alguns estados, como Texas e Wisconsin, condados mais ricos tendem a mais nos republicanos.[13] Em outros, como Maryland, Califórnia e Nova York, os con mais ricos são mais democratas. Estes últimos são aqueles onde vivem muitos pon políticos. Em seus mundinhos fechados, os bairros ricos estão, *sim*, carregados de li ricos, e para eles é natural generalizar sua experiência para o resto do país. Natural – quando se olha para os números globais, está claramente errado.

Aqui parece haver um paradoxo. Ser rico está positivamente correlacionado a ser estado rico, mais ou menos por definição. E ser de um estado rico está positiva correlacionado a votar nos democratas. Será que isso não significa que ser rico *deve*

correlacionado a votar nos democratas? Geometricamente, sim. Se o vetor 1 form ângulo agudo com o vetor 2 e o vetor 2 forma um ângulo agudo com o vetor 3, o v deve formar um ângulo agudo com o vetor 3?

Não! Veja a prova na figura:




Algumas relações, como "maior que", são *transitivas*. Se eu peso mais que meu f meu filho pesa mais que minha filha, é certeza absoluta que eu peso mais que minha "Vive na mesma cidade que" também é transitivo – se eu vivo na mesma cidade qu que vive na mesma cidade que Bob, então eu vivo na mesma cidade que Bob.

A correlação não é transitiva, é mais como uma "relação consanguínea" – eu relacionado com meu filho, que está relacionado com minha esposa, mas minha esp eu não temos relação consanguínea. Na verdade, não é uma ideia terrível pensar que var correlacionadas "compartilham parte de seu DNA". Imagine uma pequena firma de a nistração financeira com apenas três investidores, Laura, Sara e Tim. Suas posiçõe investimentos são bastante simples. Os recursos de Laura estão divididos 50-50 Facebook e Google; Tim tem metade na General Motors e metade na Honda; e Sar equilibrada entre a velha economia e a nova, tem metade na Honda e metade no Face É bastante óbvio que os retornos de Laura terão uma correlação positiva com os de porque elas têm metade da carteira de investimentos em comum. A correlação en retornos de Sara e de Tim será igualmente forte. Mas não há razão para se pensar desempenho das ações de Tim esteja correlacionado ao desempenho das de Laura.[r] dois fundos são como pais, cada um contribuindo com metade do "material genético forma o fundo híbrido de Sara.

A intransitividade da correlação de certo modo é óbvia e misteriosa ao mesmo te No exemplo do fundo de investimentos, você jamais seria levado a pensar que um aur na performance das ações de Tim lhe dê muita informação sobre como as de Laura es saindo. Mas nossa intuição não dá tão certo em outros domínios. Considere, por exe o caso do "colesterol bom", nome comum para o colesterol transportado na corrente sa nea por lipoproteínas de alta densidade, ou HDL. Sabe-se há décadas que altos nív colesterol HDL no sangue estão associados a risco mais baixo de "acidentes cardiovascu Caso você não seja falante nativo de medicalês, isso significa que gente com profus colesterol bom, em média, tem menos probabilidade de sofrer um entupimento do co e cair morto.

Sabemos também que certas drogas aumentam confiavelmente os níveis de HDL.

HDL está associado a menor risco de acidentes cardiovasculares, parece que caprich niacina é uma boa ideia. Foi isso que meu médico me recomendou, e provavelmente também, a não ser que você seja um adolescente, corredor de maratona ou memb alguma outra casta metabolicamente privilegiada.

O problema é que não está claro como a coisa funciona. A suplementação de ni registrou resultados promissores em pequenos testes clínicos. Mas um teste em larga realizado pelo National Heart, Lung, and Blood Institute foi interrompido em 2011, ano e meio antes do encerramento programado, porque os resultados foram tão fráge não parecia valer a pena continuar. Pacientes que receberam niacina tinham níveis altos de HDL, tudo bem, mas tiveram tantos ataques cardíacos e derrames quanto os d da população pesquisada. Como é possível? A correlação não é transitiva. A niacin correlacionada ao HDL elevado, e o HDL elevado está correlacionado a baixo risco de a cardíaco, mas isso não significa que a niacina impeça os ataques.

Isso não quer dizer que manipular o colesterol HDL não dê em nada. Cada dr diferente, e pode ser clinicamente relevante saber *como* você incrementa o nível de Voltando à firma de investimentos, sabemos que os retornos de Tim estão correlacio aos de Sara, e você pode tentar melhorar os ganhos de Sara tomando medidas para mel os de Tim. Se sua abordagem fosse soltar uma dica de mercado falsamente otimista subir o preço das ações da GM, descobriria ter conseguido melhorar a performance de enquanto Sara não se beneficiaria em nada. Mas se fizesse a mesma coisa com a Hon números de Tim e Sara melhorariam.

Se a correlação fosse transitiva, a pesquisa médica seria muito mais fácil do que real é. Décadas de observação e coleta de dados nos deram montes de correlações conhe com as quais trabalhar. Se tivéssemos transitividade, os médicos poderiam simples ligar essas correlações em cadeias, criando intervenções confiáveis. Sabemos que os de estrogênio estão correlacionados a menor risco de doença cardíaca, e sabemos terapia de reposição hormonal pode aumentar esses níveis. Então, seria de esperar terapia de reposição hormonal servisse como proteção contra doença cardíaca. De fat costumava ser uma atitude clínica sensata. Mas, como você provavelmente já ouviu f realidade é bem mais complicada. No começo da década de 2000, a Women's H Initiative, estudo de longo prazo envolvendo um gigantesco teste clínico aleatório, r que a terapia de reposição hormonal com estrógeno e progestina na verdade p *aumentar* o risco[15] de doença cardíaca na população estudada. Resultados mais re sugerem que o efeito da terapia de reposição hormonal pode ser diferente em g distintos de mulheres, ou que o estrógeno sozinho[16] poderia ser melhor para o coraçã a dupla estrógeno-progestina, e assim por diante.

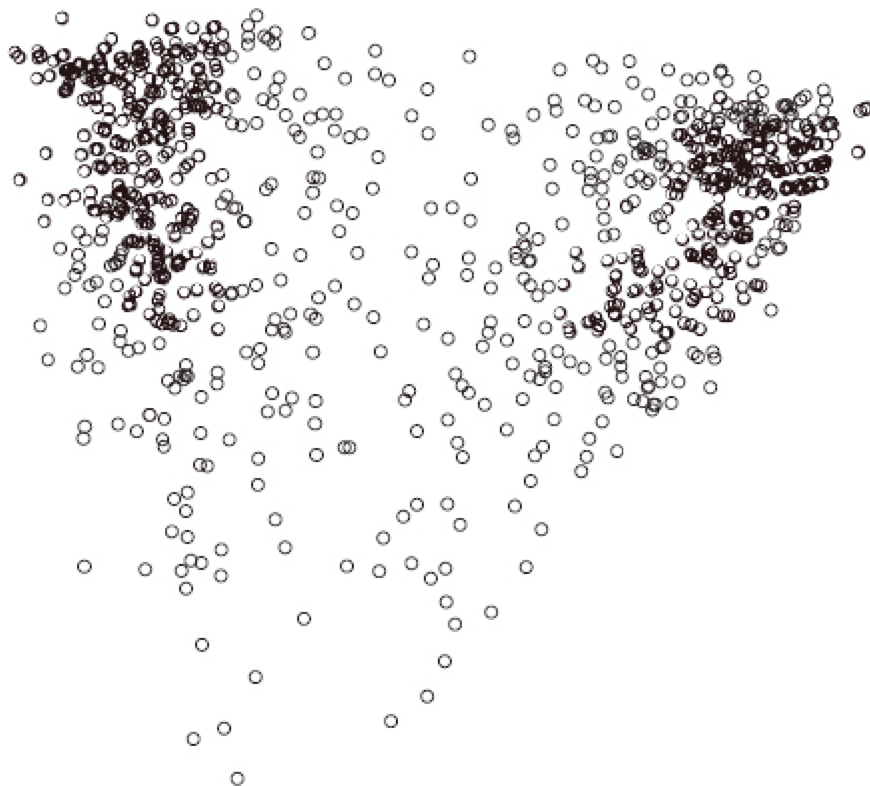
No mundo real, é quase impossível predizer que efeito a droga terá sobre uma do mesmo que você saiba um bocado sobre como ela afeta biomarcadores como o HDL nível de estrogênio. O corpo humano é um sistema imensamente complexo, e só pod medir algumas de suas características, que dizer então manipulá-las. Com base em co ções que podemos observar, há uma porção de drogas que poderiam ter, de modo plau um desejado efeito sobre a saúde. Elas são testadas em experimentos, e a maioria

fracassa de maneira decepcionante. Trabalhar no desenvolvimento de drogas requer psique persistente, para não mencionar o vasto aporte de capital.

## Sem correlação não significa sem relação

Quando duas variáveis são correlacionadas, vimos que de algum modo elas se relaci mutuamente. E se não houver correlação? Será que isso significa total ausência de re que uma não afeta a outra? De modo algum. A noção de correlação de Galton é limit de uma maneira muito importante: ela detecta relações *lineares* entre variáveis, nas q aumento numa das variáveis tende a coincidir com um aumento (ou diminuição) de m proporção na outra. No entanto, da mesma forma que nem todas as curvas são retas todas as relações entre as variáveis são relações lineares.

Vamos pegar a seguinte correlação:



Você está olhando para um quadro que fiz a partir de uma pesquisa política real pela Public Policy Polling em 15 de dezembro de 2011. Há mil pontos, cada um represen um eleitor que respondeu a um questionário de 23 perguntas. A posição de um pon eixo esquerda-direita representa, bem, esquerda e direita: pessoas que disseram ap presidente Obama, aprovar o Partido Democrata e opor-se ao Tea Party[s] tendem a est lado esquerdo, enquanto aqueles que favorecem o GOP, não gostam de Harry R acreditam que há uma "Guerra ao Natal" estão do lado direito. O eixo vertical repre aproximadamente "grau de informação" – eleitores na base do gráfico tendem a resp "não sei" para questões mais específicas, que demandam mais informação, como

exemplo, “Você aprova ou desaprova o trabalho que [o líder da minoria no Senado] I McConnell está fazendo?”, bem como a manifestar pouca e nenhuma empolgação c eleição presidencial de 2012.

Pode-se verificar que as variáveis medidas pelos dois eixos não apresentam correl: exatamente como é sugerido por uma simples olhada no gráfico. Não parece que os p tendam a ir mais longe para a esquerda ou para a direita à medida que você sobe na pa Mas isso não significa que as duas variáveis não estejam relacionadas entre si. Na ver a relação fica bastante clara a partir da figura. O gráfico tem “forma de coração”, co lobo de cada lado e um ponto na base. À medida que os eleitores são mais bem inform eles não tendem mais para democratas ou republicanos. Ficam *mais polarizados*: esquer vão mais para a esquerda, direitistas vão mais para a direita, e o espaço esparsar habitado no meio fica ainda mais disperso. Na metade inferior do gráfico, os eleitores n informados tendem a adotar uma postura mais de centro. O gráfico reflete um fato estabelecido, que já se tornou lugar-comum na literatura da ciência política. Ele indecisos, em sua grande maioria, não estão indecisos por estarem pesando cuidadosar os méritos de cada candidato, sem ideias preconcebidas a respeito de dogmas poli Estão indecisos porque nem prestam muita atenção ao processo eleitoral.

Uma ferramenta matemática, como qualquer outro instrumento científico, detecta a tipo de fenômeno, mas não outros; um cálculo de correlação não consegue ver a for coração (cardiomorfismo?) do gráfico, assim como sua câmera fotográfica não con detectar raios gama. Tenha isso em mente quando lhe disserem que dois fenômen natureza ou na sociedade foram considerados sem correlação. Isso não significa qu haja relação nenhuma, apenas que não há relação do tipo que a correlação é projetad detectar.

---

[a] Ou pelo menos reinventou: o astrônomo John Herschel construiu uma espécie de gráfico de dispersão em 18 estudar as órbitas de estrelas binárias. Aliás, este não é o mesmo Herschel que descobriu Urano – o descobridor pai, William Herschel. Ingleses notáveis e seus parentes notáveis! Todo o material sobre a história do gráfico de di apud Michael Friendly e Daniel Denis, “The early origins and development of the scatterplot”, *Journal of the Histor Behavioral Sciences*, v.41, n.2, primavera 2005, p.103-30.

[b] O que Florence Nightingale realmente chamou de *coxcomb* era o livreto contendo o gráfico, não o gráfico propri dito, mas todo mundo passou a adotar coxcomb, e agora é tarde demais para mudar.

[c] Esse fator 1,08 serve para fazer as alturas das mães se ajustarem aproximadamente às dos pais, de modo que as alt ambos possam ser medidas na mesma escala.

[d] As curvas isopléticas remontam a muito tempo antes disso. As primeiras que conhecemos foram as curvas isobát profundidade constante) desenhadas em mapas de rios e ancoradouros, que retrocedem até pelo menos 1584. Mas parece ter inventado a técnica independentemente, e com toda a certeza a popularizou.

[e] Pode-se também argumentar em favor de curvas de crescimento exponencial, que são tão ubíquas quanto as cônicas.

[f] A diferença de nomenclatura em relação aos países de língua inglesa gera diferença na tradução (no original, *qua* o termo “quadrática” no Brasil é quase universalmente aplicado a curvas do tipo $y = ax^2 + b$, que gera uma pará plano. (N.R.T.)

[g] De acordo com a definição, as curvas quádricas são superfícies de segundo grau no espaço, correspondendo a f em três variáveis, mas nunca multiplicando mais de duas entre si (o que inclui variáveis elevadas ao quadrado nome). (N.R.T.)

[h] Na verdade, há alguns casos extras, como a curva com a equação $xy = 0$, que é um par de retas cruzando-se no

[i] Se admitirmos três variáveis estaremos tratando com superfícies com um pouco mais de variedade: elipsoide, el de revolução (caso particular do elipsoide), esfera (caso particular do elipsoide de revolução), paraboloide ‹ paraboloide de revolução (caso particular do paraboloide elíptico), paraboloide hiperbólico, hiperboloide de um hiperboloide de duas folhas, cone, cilindro elíptico, cilindro circular, cilindro hiperbólico, cilindro parabólico. (N.

[j] Com todo seu entusiasmo por dados, porém, Bertillon estragou o maior caso que lhe chegou às mãos. Ele aj condenar Alfred Dreyfus por traição, com uma fajuta "prova geométrica" de que a carta em que havia a ofert venderem documentos franceses tinha sido escrita na caligrafia de Dreyfus. Ver L. Schneps e C. Colmez, *A mat nos tribunais*, op.cit., para um relato completo do caso e do desafortunado envolvimento de Bertillon.

[k] Em todo caso, é assim que Fosdick conta a história em "The passing of the Bertillon system of identification". C caso de qualquer crime famoso do passado, há um grande aumento de incerteza e teoria da conspiração em tc roubo da *Mona Lisa*, e outras fontes contam histórias diferentes sobre o papel das impressões digitais.

[l] Leitores de certa idade podem gostar de saber que o Parsons que inventou o código era pai de Alan Parsons, que "Eye in the sky".

[m] Tudo bem, não é literalmente apenas uma questão de correlações entre pares de pixels, mas acaba se redu quantidade de informação (no sentido de Shannon) transmitida pela imagem.

[n] Mantivemos as temperaturas em graus Fahrenheit porque interessa aqui a comparação das unidades, e não propri as temperaturas. Lembra-se ao leitor interessado a fórmula de conversão de temperatura Fahrenheit para Celsiu 0,55 ($T_F$ – 32), onde $T_C$ e $T_F$ são, respectivamente, as temperaturas Celsius e Fahrenheit. Para que se tenha uma i faixa dessas temperaturas, o gráfico a seguir vai de uma mínima aproximada de –9,5°C no eixo horizontal a uma r aproximada de –3,5°C no eixo vertical (inverno no hemisfério norte). (N.T.)

[o] Variação das temperaturas em graus Celsius no gráfico a seguir, neste caso igual para ambos os eixos: mínin máxima: 15,5°C. (N.T.)

[p] Pai de Egon Pearson, que brigou com R.A. Fisher num capítulo anterior.

[q] Embora talvez seja melhor não ficar me queixando alto demais sobre o uso incorreto de *exponencial* para si simplesmente "rápido" – há pouco vi um repórter esportivo, que sem dúvida havia sido em algum momento repre sobre a palavra exponencial, referir-se ao "impressionante, logarítmico aumento de velocidade" do corredor Usain que é ainda pior.

[r] Exceto no caso em que todo o mercado de ações tenda a se mover em uníssono, claro.

[s] Ala radical do Partido Republicano. (N.T.)

[t] Senador democrata pelo estado de Nevada, foi líder da maioria democrata no Senado entre 2007-2011. (N.T.)

[u] Nota técnica para os interessados: na verdade, essa é a projeção bidimensional fornecida por uma análise dos comp principais das respostas à pesquisa, de modo que a inexistência de correlação dos dois eixos é automática. A interp dos eixos é minha. O exemplo destina-se apenas a ilustrar um ponto sobre correlação, e não deve, em ne circunstância, ser tomado como ciência social de verdade!

# 16. O câncer de pulmão leva você a fumar?

E QUANDO DUAS variáveis *são* correlacionadas? O que isso realmente significa?

Para simplificar, comecemos com o tipo mais simples de variável, uma variável *bi* com apenas dois valores possíveis. Frequentemente uma variável binária é a resposta uma pergunta tipo sim ou não: "Você é casada?" "Você fuma?" "Você é atualmen algum dia foi, membro do Partido Comunista?"

Quando você compara duas variáveis binárias, a correlação assume uma f particularmente simples. Dizer que a situação conjugal e a situação de fumante são n vamente correlacionadas, por exemplo, é simplesmente dizer que a pessoa casada tem n probabilidade de fumar que a pessoa média. Ou, falando de outra maneira, que os fum têm menos probabilidade que a pessoa média de se casar. Vale a pena reservar um mor para persuadir a si mesmo que essas duas coisas são de fato a mesma! A primeira afirn pode ser escrita como uma inequação:

fumantes casados / todas as pessoas casadas < todos os fumantes / todas as pessoas

E a segunda como:

fumantes casados / todos os fumantes < todas as pessoas casadas / todas as pessoas

Se você multiplicar todos os lados de cada inequação pelo denominador comum ( as pessoas) × (todos os fumantes), poderá ver que ambos os enunciados são mai diferentes de dizer a mesma coisa:

(fumantes casados) × (todas as pessoas) < (todos os fumantes) × (todas as pessoas casadas)

Da mesma forma, se fumar e casamento fossem *positivamente* correlacionados significaria que pessoas casadas têm maior probabilidade que a média de fumar e fum têm maior probabilidade que a média de se casar.

Um problema se apresenta de imediato. Seguramente é muito pequena a chance d a proporção de fumantes entre as pessoas casadas seja *exatamente igual* à proporç fumantes na população total. Então, exceto uma coincidência maluca, casamento e f estarão correlacionados, seja positiva, seja negativamente. Também estarão correlacion orientação sexual e fumar, cidadania americana e fumar, primeira inicial na última m

do alfabeto e fumar, e assim por diante. *Tudo* estará correlacionado a fumar, em uma di ou outra. Esse é o mesmo tema que encontramos no Capítulo 7: a hipótese nula, estritar falando, quase sempre é falsa.

Botar as mãos na cabeça e dizer "Tudo está correlacionado com tudo!" seria bem p informativo. Então, não relatamos todas essas correlações. Quando você lê num rel que uma coisa está correlacionada a outra, está implicitamente sendo informado de correlação é "forte o bastante" para valer a pena ser relatada – geralmente porque p num teste de significância estatística. Como vimos, o teste de significância estatístic consigo muitos perigos, mas pelo menos é um sinal que faz o estatístico se aprumar, direito e dizer: "Alguma coisa deve estar acontecendo."

Mas o quê? Aqui chegamos à parte realmente enrolada. Casamento e fumar negativamente correlacionados, isso é fato. Um modo típico de exprimir isso é dizer

"Se você é fumante, tem menos probabilidade de ser casado."

Mas uma pequena mudança torna o significado muito diferente:

"Se você fosse fumante, teria menos probabilidade de ser casado."

Parece estranho que mudar um verbo do modo indicativo para o subjuntivo modificar drasticamente o que diz a sentença. Mas a primeira frase é apenas uma decla a respeito do caso de que estamos tratando. A segunda se refere a uma questão muito delicada: qual *seria* o caso se mudássemos algo em relação ao mundo? A primeira sen expressa uma correlação; a segunda sugere uma causalidade. Como já mencionam duas coisas não são iguais. O fato de fumantes serem menos frequentemente casados q outros não significa que deixar de fumar irá fazer surgir de imediato sua futura espo descrição matemática da correlação tem estado bem fixa no lugar desde o trabalho de G e Pearson, um século atrás. Assentar a ideia de causalidade sobre um alicerce matem firme tem sido algo muito mais fugaz.

Há algo de escorregadio na nossa compreensão de correlação e causalidade. A int tende a captá-la com bastante firmeza em algumas circunstâncias, mas deixa escapa outras. Quando dizemos que o HDL está correlacionado a menor risco de ataque car estamos fazendo uma afirmação factual: "Se você tem um nível mais alto de colesterol menor é sua probabilidade de ter um ataque do coração." É difícil não pensar que o está *fazendo* alguma coisa – que as moléculas em questão literalmente provocam melhora de sua saúde cardiovascular, digamos, "esfregando e limpando" a crosta lipíd suas paredes arteriais. Se assim fosse – se a mera presença de muito HDL estivesse fu nando em seu benefício –, seria razoável esperar que qualquer intervenção aumenta HDL contribuísse para reduzir o risco de ataque cardíaco.

Mas talvez o HDL e os ataques cardíacos estivessem correlacionados por um m diferente. Digamos que algum outro fator, que nós não medimos, tende a aumentar o e a reduzir o risco de acidentes cardiovasculares. Se for esse o caso, uma droga que au

misterioso fator, provavelmente ajudará seu coração, porém, se estimula o HDL de a
outro modo, todas as chances caem por terra. Essa é a situação de Tim e Sara. O su
financeiro deles está correlacionado, mas não porque o fundo em que Tim investe
provocando a decolada de Sara, nem o contrário. Há um fator misterioso, as ações da H
que afeta a ambos, Tim e Sara. Pesquisadores clínicos chamam isso de *problema do*
*final substituto*. É caro e consome tempo verificar se uma droga aumenta a duração r
de um tempo de vida porque, para registrar o tempo de vida de uma pessoa, é pr
esperar que ela morra. O nível de HDL é o ponto final substituto, o biomarcador fá
checar, teoricamente responsável por "vida longa sem ataque cardíaco". Mas a corre
entre HDL e ausência de ataques cardíacos pode não indicar nenhum vínculo causal.

Fazer a separação entre correlações provenientes de relações causais e aquelas qu
são causais é um problema enlouquecedor e difícil, mesmo em casos que podem pa
óbvios, como a relação entre fumar e câncer de pulmão.[1] Na virada do século XX, o c
de pulmão era uma doença extremamente rara. Mas, por volta de 1947, ele era respo
por quase ⅕ das mortes por câncer entre os homens britânicos, matando cerca de q
vezes mais pessoas do que matara em décadas anteriores. No começo, muitos pesquisa
achavam que o câncer de pulmão estava sendo mais bem diagnosticado que antes, ma
ficou claro que o aumento de casos era grande e rápido demais para ser atribuído
efeito desse tipo. O câncer de pulmão realmente estava em alta. No entanto, ninguém
certeza de quem era o culpado. Talvez fosse a fumaça das fábricas, talvez o aument
níveis de escape de veículos, ou talvez alguma substância nem sequer imaginada
poluente. Ou talvez fossem os cigarros, cuja popularidade eclodiu durante o mesmo pe

Por volta de 1950, grandes estudos na Inglaterra e nos Estados Unidos mostraram
poderosa associação entre fumar e câncer de pulmão. Entre os não fumantes, o cânc
pulmão ainda era uma doença rara, todavia, para os fumantes, o risco era espetacular
mais alto. Um famoso artigo de Doll e Hill,[2] de 1950, descobriu que, entre 649 homen
câncer de pulmão, em vinte hospitais londrinos, apenas dois eram não fumantes. Iss
soa tão impressionante segundo os padrões modernos. Em Londres, em meados do s
fumar era um hábito extremamente popular, e os não fumantes eram muito mais rar
hoje. Mesmo assim, numa população de 649 pacientes do sexo masculino hospitali
por queixas outras que não o câncer de pulmão, 27 eram não fumantes, bem mais que
Além disso, a associação ficava mais forte à medida que o hábito de fumar era mais pe
Dos pacientes com câncer de pulmão, 168 fumavam mais de 25 cigarros por dia, enq
apenas 84 hospitalizados por outros motivos fumavam tanto assim.

Os dados de Doll e Hill mostravam que câncer de pulmão e fumo estavam *correlacion*
sua relação não era de determinação estrita (alguns fumantes pesados não têm cânc
pulmão, enquanto alguns não fumantes têm), mas tampouco os dois fenômenos
independentes. Sua relação ficava na nebulosa área intermediária que Galton e Pe
haviam sido os primeiros a mapear.

A mera declaração de correlação é muito diferente de uma explicação. O estudo de
e Hill não mostra que fumar causa câncer. Eles escrevem: "A associação ocorreria
carcinoma do pulmão fizesse as pessoas fumarem, ou se ambos os atributos fossem e

ressaltam, não é muito razoável. Um tumor não pode voltar atrás no tempo e dar a al
o hábito de fumar um maço por dia. Mas o problema da causa comum é mais trabalh

Nosso velho amigo R.A. Fisher, herói fundador da estatística moderna, era um vig
cético da ligação entre tabaco e câncer exatamente com os mesmos fundamentos. Fish
o herdeiro intelectual natural de Galton e Pearson. Na verdade, sucedeu Pearson em
na Cátedra Galton de Eugenia no University College, em Londres. (Em deferên
sensibilidades modernas, a posição é agora chamada de Cátedra Galton de Genética.)

Fisher sentia que era prematuro excluir até a teoria de que "câncer leva a fumar":

> Será possível, então, que o câncer de pulmão – vale dizer, a condição pré-cancerosa que deve viger e cuja exis
> conhecida durante anos naqueles que exibirão o câncer de pulmão – seja uma das causas de fumar? Não acho
> possa ser excluído. Não julgo que saibamos o suficiente para dizer que há essa causa. Mas a condição pré-ca
> envolve certa quantidade de inflamação crônica leve. As causas de fumar podem ser estudadas entre seus ami
> alguma medida, e creio que se concordará que uma ligeira causa de irritação – uma ligeira decepção, um
> inesperado, algum tipo de crítica branda, uma frustração – é comumente acompanhada pela tentativa de fumar,
> maneira obter um pouquinho de compensação pelos infortúnios menores da vida. Assim, não é improváv
> qualquer um que sofra de uma inflamação crônica em alguma parte do corpo (algo que não dê margem a dor cons
> que esse sofrimento esteja associado ao ato de fumar com mais frequência, ou simplesmente de fumar, em vez
> fumar. Esse é o tipo de conforto que poderia ser um verdadeiro consolo para qualquer um que esteja numa
> quinze anos próxima do câncer de pulmão. Tirar o cigarro do pobre coitado seria como tirar a bengala de um ce
> faria mais infeliz a pessoa já infeliz.[3]

É possível ver aqui a exigência de um estatístico brilhante e rigoroso, de que to
possibilidades recebam justa consideração, até o apego de um fumante inveterado pe
hábito. (Alguns também viram a influência do trabalho de Fisher como consultor do c
permanente da Tobacco Manufacturer, grupo industrial britânico. A meu ver, a relut
de Fisher em afirmar uma relação causal era consistente com sua abordagem esta
geral.) A sugestão de Fisher, de que os homens na amostra de Doll e Hill pudessem te
levados a fumar por uma inflamação pré-cancerosa, jamais vingou, porém, seu argu
em favor de uma causa comum ganhou mais força. Fisher, fiel a seu título acadêmic
um dedicado eugenista, acreditando que diferenças genéticas determinavam uma p
saudável do nosso destino, e que as melhores espécies estavam, naqueles indulgentes te
evolutivos, em grave risco de serem batidas pelos seus inferiores naturais.

Do ponto de vista de Fisher, era perfeitamente normal imaginar que um fator ge
comum, ainda não mensurado, estivesse por trás tanto do câncer de pulmão quan
propensão a fumar. Isso pode parecer bastante especulativo, mas lembre-se de que, na é
a geração do câncer de pulmão provocado pelo fumo assentava-se sobre alicerces igual
misteriosos. Nenhum componente químico do tabaco havia se mostrado capaz de pro
tumores em laboratório.

Há uma forma elegante de testar a influência genética do fumo estudando gê
Digamos que dois gêmeos "combinam" se ambos forem fumantes ou se ambos não
fumantes. É esperável que a combinação seja bastante comum, pois em geral os gê
crescem na mesma casa, com os mesmos pais e sob as mesmas condições culturais, e
de fato o que se vê. Mas gêmeos idênticos e gêmeos fraternos estão sujeitos a esses f
comuns exatamente no mesmo grau. Então, se gêmeos idênticos têm mais probabilida
combinar que gêmeos fraternos, isso é evidência de que fatores hereditários exercem al

a esse respeito, a partir de estudos não publicados, e trabalhos mais recentes têm confir sua intuição.[4] O ato de fumar parece estar sujeito a pelo menos alguns fatores heredita

Isso, obviamente, não quer dizer que esses mesmos genes são o que provoca cânc pulmão mais adiante na estrada. Sabemos um bocado mais sobre câncer e como o tab provoca. O fato de que fumar dá câncer já não está sujeito a dúvida. Todavia, é difíc ter um pouquinho de simpatia pela abordagem "não vamos nos apressar" de Fisher. I ser desconfiado diante das correlações. O epidemiologista Jan Vandenbroucke escre respeito dos artigos de Fisher sobre o tabaco: "Para minha surpresa, encontrei a extremamente bem escritos e convincentes que poderiam ter se tornado livros-texto clá pela sua impecável lógica e clara exposição de dados e argumentos, se os autores estive do lado certo."[5]

No decorrer dos anos 1950, a opinião científica sobre a correlação entre fumo e c de pulmão convergiu uniformemente para um consenso. É verdade, ainda não havia ne mecanismo biológico claro para a geração de tumores pela fumaça de tabaco, e aind havia argumento para a associação entre fumar e câncer que não se baseasse nas correl observadas. No entanto, em 1959, tantas dessas correlações haviam sido vistas, e ta possíveis fatores de confusão descartados, que o Diretor Nacional de Saúde do go americano, Leroy E. Burney, declarou: "O peso da evidência no presente implica o a fumar como principal fator na crescente incidência de câncer de pulmão." Mesmo e essa postura não era incontroversa. John Talbott, editor do *Journal of the American M Association*, revidou o fogo apenas três semanas depois num editorial do periódico:

> Numerosas autoridades que examinaram a mesma evidência citada pelo dr. Burney não concordam com suas con Nem os proponentes nem os oponentes da teoria do fumo possuem evidência suficiente para garantir a pren uma posição de autoridade do tipo tudo ou nada. Até que sejam realizados estudos definitivos, o médico pode c com sua responsabilidade observando a situação de perto, mantendo-se a par dos fatos e aconselhando seus pa com base em sua avaliação.[6]

Talbott, assim como Fisher antes dele, acusava Burney e aqueles que concordavam ele de estarem, cientificamente falando, colocando a carroça na frente dos bois.

Quanto essa disputa se manteve feroz, mesmo dentro do establishment científico claro pelo extraordinário trabalho do historiador da medicina Jon Harkness.[7] Sua exa pesquisa de arquivos mostrou que a declaração assinada pelo Diretor Nacional foi na ve escrita por um grande grupo de cientistas do Serviço Público de Saúde, e que o pr Burney tivera pouco envolvimento direto. Quanto à resposta de Talbott, essa também *ghostwriters*, um grupo rival de pesquisadores do Serviço Público de Saúde! O que pa uma rixa entre funcionários do governo e establishment médico era, na verdade, uma científica interna projetada em tela pública.

Sabemos como a história termina. O sucessor de Burney no cargo de Diretor Na de Saúde, Luther Terry, convocou um comitê independente, formado por figuras ilu para debater a relação entre fumo e saúde no começo da década de 1960. Em janei 1964, com a cobertura nacional da imprensa, o comitê anunciou seus achados em te que faziam Burney parecer tímido:

Em vista da continuada e acumulada evidência vinda de muitas fontes, julga o comitê que fumar contribui subs mente para a mortalidade de certas doenças específicas e para a taxa de mortalidade geral. … *Fumar cigarro é u à saúde de importância suficiente nos Estados Unidos para exigir ação corretiva apropriada.* (Grifos do relatório o

O que havia mudado? Em 1964, a associação entre fumo e câncer tinha apareci modo consistente em estudo após estudo. Fumantes pesados sofriam mais de cânce fumantes leves, e o câncer estava provavelmente no ponto de contato entre o taba tecido humano; fumantes de cigarros tinham mais câncer de pulmão, fumantes de cach mais câncer de boca. Ex-fumantes estavam menos propensos ao câncer que fumantes a Todos esses fatores se combinaram para levar o comitê à conclusão de que fumar não apenas correlacionado ao câncer de pulmão, mas *causava* o câncer de pulmão, e que es para reduzir o consumo de tabaco provavelmente contribuiriam para prolongar as americanas.

## Nem sempre é errado estar errado

Num universo alternativo, em que a mais recente pesquisa sobre tabaco tivesse resu diferente, poderíamos ter descoberto que a estranha teoria de Fisher afinal estava cor que fumar era consequência do câncer, e não o contrário. E essa não teria sido, de lo maior inversão nas ciências médicas. E aí? O Diretor Nacional de Saúde teria emitid *press release* dizendo: "Lamento, todo mundo agora pode voltar a fumar." Nesse ínteri fabricantes de cigarro teriam perdido um monte de dinheiro, milhões de fumantes t abdicado de bilhões de prazerosos cigarros. Tudo porque o diretor nacional havia decl como fato aquilo que era apenas uma hipótese fortemente respaldada.

Mas qual era a alternativa? Imagine o que você teria de fazer para saber realmente algum tipo de certeza absoluta, que fumar causa câncer de pulmão. Você teria de uma grande população de adolescentes, selecionar metade deles aleatoriamente e forç metade a passar os cinquenta anos seguintes fumando cigarros de modo regular, enq a outra metade teria de se abster dessa prática. Jerry Cornfield, pioneiro da pesquisa fumo, declarou que tal experimento era "possível de conceber, mas impossível de rea Mesmo que o experimento fosse logisticamente possível, ele violaria toda norma existente acerca de pesquisa com sujeitos humanos.

Os responsáveis por políticas públicas não têm o luxo da incerteza de que os cie dispõem. Precisam elaborar seus melhores palpites e tomar decisões com base neles. Q o sistema funciona – como inquestionavelmente funcionou, no caso do tabaco –, o cie e o responsável pela política pública trabalham em uníssono, o cientista avaliando o g incerteza que devemos ter e o responsável pela política decidindo como agir com b incerteza especificada.

Às vezes isso leva a erros. Já deparamos com o caso da terapia de reposição hor que durante muito tempo julgou-se proteger mulheres em idade pós-menopausa doenças cardíacas, com base em correlações observadas. As recomendações cor balizadas em experimentos aleatórios realizados posteriormente, são mais ou me

Em 1976 e novamente em 2009, o governo dos Estados Unidos embarcou numa m
e cara campanha de vacinação contra a gripe suína, tendo recebido advertências de e
miologistas cada vez que a cepa predominante corria o risco de se tornar catastroficar
pandêmica. Na verdade, os dois surtos de gripe, embora graves, estavam bem longe
desastrosos.[9]

É fácil criticar os responsáveis pela política nesses cenários, por deixar que a toma
decisões assuma a dianteira da ciência. Mas não é tão simples assim. *Nem sempre é e
estar errado.*

Como pode ser? Um rápido cálculo de valor esperado, como os feitos na Parte III,
a desvendar esse dito aparentemente paradoxal. Suponha que estejamos considerando
uma recomendação na área de saúde – digamos, que as pessoas devam parar de c
berinjela porque ela representa um pequeno risco de súbita e catastrófica parada car
Essa conclusão baseia-se numa série de estudos que descobriram que os comedor
berinjela têm probabilidade ligeiramente maior que os não comedores de berinjela d
mortos de repente. Mas não há perspectiva de se fazer um teste controlado aleatór
larga escala, pelo qual forcemos algumas pessoas a comer berinjela e obriguemos ou
se abster. Precisamos nos contentar com a informação que temos, e que representa a
uma correlação. Pelo que sabemos, há uma base genética comum para berinjelofilia e p
cardíaca. Mas não há como ter certeza.

Talvez estejamos 75% seguros de que nossa conclusão está correta, e que uma cam
contra a berinjela salvaria mil vidas americanas por ano. Mas há também 25% de char
que nossa conclusão esteja errada. Se for assim, induzimos muita gente a abandonar a
que poderia ser seu legume predileto, levando-as a uma dieta geral menos saud
causando, digamos, duzentas mortes a mais por ano.[a]

Como sempre, obtemos o valor esperado multiplicando o valor de cada resultado po
pela probabilidade correspondente, e então somando tudo. Nesse caso, descobrimos c

$$75\% \times 1.000 + 25\% \times (-200) = 750 - 50 = 700$$

Nossa recomendação tem um valor esperado de setecentas vidas salvas por ano. A
das estridentes e bem-financiadas reclamações do Conselho da Berinjela, e a despe
nossa incerteza bastante real, vamos a público.

Lembre-se de que o valor esperado não representa o que literalmente esperamo
aconteça, mas o que poderíamos esperar que aconteça *em média* caso a mesma decisão
repetida vezes e vezes seguidas. Uma decisão de saúde pública não é como tirar ca
coroa; é algo que se pode fazer apenas uma vez. Por outro lado, berinjelas não são o
perigo ambiental que podemos ser chamados a avaliar. Talvez a seguir tenhamos
atenção voltada para o fato de a couve-flor estar associada à artrite, ou que escovas de c
vibratórias estão associadas a autismo. Se, em cada caso, cada intervenção tiver um
esperado de setecentas vidas por ano, deveríamos executar todas, e em média esperar
salvar setecentas vidas a cada vez. Em qualquer caso individual, poderíamos acabar fa

mais mal que bem, porém, de forma geral, salvaremos um monte de vidas. Con jogadores de loteria num dia de rolagem, arriscamo-nos a perder num dado instante temos quase certeza de nos sairmos bem a longo prazo.

E se nos ativermos a um padrão de evidência mais estrito, declinando de impl qualquer uma dessas recomendações porque não temos *certeza* de que estamos c Então as vidas que seriam salvas teriam se perdido.

Seria ótimo se pudéssemos atribuir probabilidades precisas, objetivas, a questões d de saúde na vida real, mas é claro que não podemos. Essa é outra diferença entre a inte de uma droga com o corpo humano e um cara ou coroa ou um bilhete de loteria. Est encalhados com as confusas e vagas probabilidades que refletem nosso grau de cren várias hipóteses, as probabilidades que R.A. Fisher negou veementemente que fo probabilidades. Não sabemos e não podemos saber o valor esperado exato de se lança campanha contra a berinjela, escovas de dentes vibratórias ou o tabaco. No entanto frequência podemos dizer com confiança que o valor esperado é positivo. Mais um isso não significa que a campanha terá bons efeitos, mas apenas que a soma total de as campanhas similares, ao longo do tempo, provavelmente fará mais bem que m própria natureza da incerteza é que nós não sabemos qual das nossas escolhas será prove como atacar o tabaco, e qual nos prejudicará, como recomendar terapia de repo hormonal. Mas uma coisa é certa: eximir-se de fazer qualquer recomendação, basea fato de que pode estar errada, é uma estratégia perdedora. É como o conselho de G Stigler sobre perder voos de avião. Se você nunca dá um conselho enquanto não tem c de ter razão, então não está aconselhando o suficiente.

## A falácia de Berkson, ou por que homens bonitões são tão idiotas?

As correlações podem surgir de causas comuns não vistas, e isso em si já causa ba confusão. Mas a história não termina aí. Correlações também podem vir de *efeitos* co Esse fenômeno é conhecido como *falácia de Berkson*, em referência ao estatístico e m Joseph Berkson, que lá atrás, no Capítulo 8, explicou como uma confiança cega nos v poderia nos levar a concluir que um pequeno grupo de pessoas incluindo um albino co em seres não humanos.

O próprio Berkson, como Fisher, era um cético vigoroso da ligação entre tabaco e c Com doutorado em medicina, ele representava a velha escola de epidemiologia, prof mente desconfiada de qualquer argumento cujo respaldo fosse mais estatístico que m Esses argumentos, pressentia ele, representavam uma invasão por parte de teóricos ing num terreno que pertencia de direito à profissão médica. “Câncer é um problema biol não estatístico”,[10] escreveu em 1958. “A estatística pode perfeitamente desempenha papel auxiliar em sua elucidação. Mas se os biólogos permitirem que os estatísticos se to árbitros de questões biológicas, o desastre científico é inevitável.”

Berkson se sentia profundamente desconfortável com o fato de se ter descoberto tabaco tinha correlação não só com o câncer de pulmão, mas com dezenas de outras do

completamente venenoso era implausível em si mesma. “É como se, ao investigar uma que antes fora indicada para alívio de um resfriado comum, se descobrisse que ela n serve para melhorar a coriza, mas também para curar pneumonia, câncer e diversas enfermidades. Um cientista diria: ‘Deve haver algo de errado nesse métod investigação.’”[11]

Berkson, como Fisher, estava mais inclinado a acreditar na “hipótese constitucion que alguma diferença preexistente entre não fumantes e fumantes era responsável estado relativamente saudável do segundo grupo.

> Se 85% a 95% de uma população é fumante, então a pequena minoria de não fumantes deveria ter, diante disso tipo especial de constituição. Não é implausível que fossem, em média, relativamente longevos, e isso implica taxas de mortalidade gerais nesse segmento da população sejam relativamente baixas. Afinal, o pequeno gr pessoas que têm sucesso em resistir às lisonjas incessantemente aplicadas e ao condicionamento de refle anunciantes de cigarros forma uma turma intrépida; e, se são capazes de enfrentar esses assaltos, dever relativamente pouca dificuldade em rechaçar a tuberculose e até o câncer![12]

Berkson também teceu objeções ao estudo original de Doll e Hill, realizado entre pac de hospitais britânicos. Ele observara, em 1938, que selecionar pacientes dessa forma produzir o surgimento de associações onde efetivamente não há.

Suponha, por exemplo, que você queira saber se pressão sanguínea elevada é um fa risco para diabetes. Você poderia fazer um levantamento dos pacientes em seu hospita o objetivo de descobrir se pressão sanguínea elevada é mais comum entre não diabétic diabéticos. E você descobre, para sua surpresa, que a pressão sanguínea elevada é comum entre pacientes com diabetes. Você poderia concluir que a pressão alta pr contra a diabetes, ou pelo menos contra sintomas de diabetes sérios o bastante para ex hospitalização. Mas antes de começar a aconselhar os pacientes diabéticos a aument consumo de besteirinhas salgadas, considere a seguinte tabela:

1.000 é a população total
300 pessoas com pressão alta
400 pessoas com diabetes
120 pessoas com pressão alta e diabetes

Vamos supor que haja mil pessoas na nossa cidadezinha, das quais 30% têm press alta e 40% têm diabetes. (Nós gostamos de besteirinhas salgadas *e* de besteirinhas doc nossa cidade.) Vamos supor, além disso, que não haja relação entre as duas condições então, 30% dos 400 diabéticos, ou 120 pessoas, também sofrem de pressão alta.

Se todas as pessoas doentes na cidade acabarem no hospital, então a populaç hospital irá consistir em

180 pessoas com pressão alta, mas sem diabetes
280 pessoas com diabetes, mas sem pressão alta
120 pessoas com pressão alta e diabetes

Dos quatrocentos diabéticos no total que estão no hospital, 120, ou 30%, têm press alta. Mas dos 180 não diabéticos no hospital, 100% têm pressão alta! Seria loucura co daí que a pressão sanguínea elevada impede você de contrair diabetes. As duas condiç estão negativamente correlacionadas, mas não porque uma cause a ausência da outra. também não porque haja algum fator oculto que simultaneamente aumente a pressão sanguínea e ajude a regular a insulina. Isso acontece porque as duas condições têm un *efeito* em comum: levar a pessoa para o hospital.

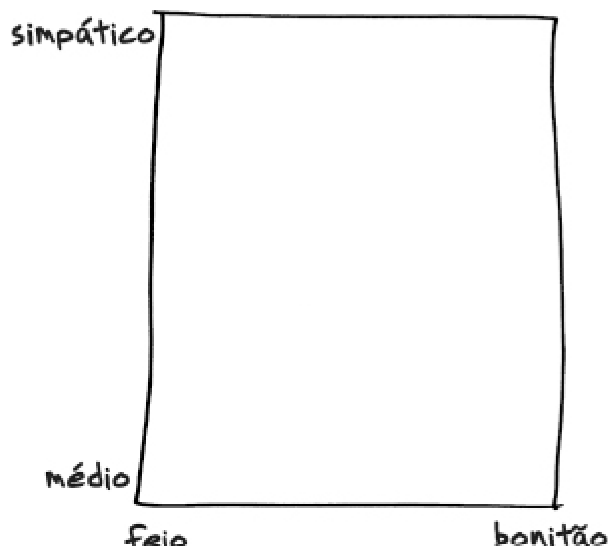
Em outras palavras, se você está no hospital, está ali por algum motivo. Se não é diab aumenta a probabilidade de ser por causa de pressão alta. Então, o que à primeira parece uma relação causal entre pressão alta e diabetes na verdade é apenas uma i estatística.

O efeito também pode funcionar no sentido oposto. Na vida real, ter duas doença uma probabilidade maior de ir parar no hospital que ter uma só. Talvez os 120 diab hipertensos da cidade terminem *todos* no hospital, mas 90% das pessoas relativar saudáveis com uma doença só ficam em casa. Também há outras razões para est hospital, por exemplo, no primeiro dia de neve do ano, muita gente tenta polir o lim de neve com a mão e acaba cortando o dedo. Então, a população do hospital poder assim:

10 pessoas sem diabetes nem pressão alta, mas com um corte profundo no dedo
18 pessoas com pressão alta, mas sem diabetes
28 pessoas com diabetes, mas sem pressão alta
120 pessoas com pressão alta e diabetes

Agora, quando você faz seu estudo no hospital, descobre que 120 em 148 diabético 81%, têm pressão alta. Mas só dezoito dos 28 não diabéticos, ou 64%, têm pressão alta faz parecer que a pressão alta *aumenta* a probabilidade de ter diabetes. Mais uma vez, contudo, isso é uma ilusão. Tudo que estamos medindo é o fato de que um conjunto d pessoas que estão hospitalizadas é qualquer coisa, menos uma amostra aleatória da população.

A falácia de Berkson faz sentido fora dos domínios da medicina. Na verdade, e sentido mesmo fora do domínio das características que podem ser precisamente qua cadas. Você deve ter notado que, entre os homens[b] na sua lista de possíveis encontr bonitões tendem a não ser simpáticos e os simpáticos tendem a não ser bonitões. Ser é porque ter uma face simétrica torna o cara cruel? Ou porque ser simpático com as pe torna o cara feio? Bem, talvez. Mas não necessariamente. Apresento a seguir o G Quadrado de Homens,




e tomo como hipótese de trabalho que os homens sejam de fato equidistribuídos por o quadrado. Em particular, há bonitões simpáticos, feios simpáticos, bonitões médios e médios em proporções aproximadamente iguais.

Mas simpatia e beleza têm um efeito em comum: colocam esses homens no grup que são notados. Seja honesta, os feios médios são aqueles que você nem chega a lev conta. Então, dentro do Grande Quadrado, há um Triângulo Menor de Homens Aceit




Agora a fonte do fenômeno está clara. Os homens mais bonitões no triângulo perc toda a gama de personalidades, desde os mais gentis até os mais antipáticos. Em médi são tão simpáticos quanto a pessoa média na população inteira, que, vamos falar a ver não é tão simpática assim. Da mesma forma, os homens mais simpáticos são a medianamente bonitos. Os feios de que você gosta, porém – eles ocupam um minú canto no triângulo e são supersimpáticos –, precisam ser visíveis para você, ou nem s estariam ali. A correlação negativa entre aparência e personalidade na sua lista de ho possíveis é absolutamente verdadeira. No entanto, se você tenta melhorar o aspecto d namorado treinando-o a agir na média, está sendo vítima da falácia de Berkson.

O esnobismo literário funciona da mesma maneira. Você sabe como são terrív

Triângulo Aceitável, que são populares ou bons. Se você se força a ler romances impopu escolhidos essencialmente ao acaso – eu já participei de um júri de prêmio literário, realmente tive de fazer isso –, descobre que a maioria deles, assim como os popula bastante ruim.

O Grande Quadrado é simples demais, claro. Há muitas dimensões, não só du longo das quais você pode classificar seus interesses amorosos ou sua leitura semar Grande Quadrado é mais bem descrito como uma espécie de Grande Hipercubo. E is para suas preferências pessoais! Se você tentar entender o que acontece na população ir vai ter de lidar com o fato de que pessoas diferentes definem atração de forma dife podem diferir quanto aos pesos que atribuem aos vários critérios ou podem simplesr ter preferências incompatíveis. O processo de agregar opiniões, preferências e desej muitas pessoas diferentes apresenta ainda outro conjunto de dificuldades. Isso quer oportunidade para fazer mais matemática. Vamos agora nos voltar para isso.

---

[a] Todos os números nesse exemplo foram inventados sem consideração de plausibilidade.

[b] Ou “pessoas do seu gênero preferido, se houver”, obviamente.

PARTE V

# Existência

Inclui: o status moral de Derek Jeter; como decidir votações tríplice programa Hilbert; usar a vaca inteira; por que americanos não são estúpidos; "cada duas tangerinas são ligadas por um sapo"; punição e inusitada; "Assim que o trabalho estava completo, a fundação ced marquês de Condorcet; o segundo teorema da incompletude; a sabedoria dos bolores limosos.

# 17. Não existe esse negócio de opinião pública

Você é um bom cidadão dos Estados Unidos ou de alguma outra democracia mais ou n
liberal. Ou talvez até tenha um cargo eletivo. Você acha que o governo deveria, qu
possível, respeitar a vontade do povo. Se é assim, você deseja saber: o que quer o povo

Às vezes você se mata fazendo pesquisas entre a população, porém, não dá pa
certeza. Por exemplo: será que os americanos querem um governo mínimo? Bom, clar
queremos, nós afirmamos isso a toda hora. Numa pesquisa da CBS, em janeiro de
77% dos entrevistados disseram que cortar despesas era a melhor maneira de lidar c
déficit orçamentário federal, contra apenas 9% que preferiam o aumento de impostos.
resultado não é só um produto da atual moda de austeridade – entra ano, sai ano, o
americano prefere cortar programas de governo a pagar mais impostos.

Mas *quais* programas de governo? É aí que a coisa pega. Acontece que os projet
que o governo americano gasta dinheiro são aqueles de que o povo gosta. Uma pesqu
Pew Research, de fevereiro de 2011, consultou os americanos sobre treze categorias de g
governamentais: em onze dessas categorias, com déficit ou não, mais gente queria aum
os gastos em lugar de diminuir.[2] Apenas a ajuda ao exterior e o seguro-desemprego -
combinados, representavam menos de 5% das despesas de 2010 – foram passados na
Isso também está de acordo com anos de dados. O americano médio está sempre ar
para reduzir a ajuda ao exterior, é ocasionalmente tolerante com cortes no bem-estar
e na defesa, mas é doido para aumentar gastos em todos os outros programas financ
pelos nossos impostos.

É isso aí, e ainda queremos um governo mínimo.

No plano estadual, a inconsistência também é grande. Os entrevistados da pesqu
Pew eram esmagadoramente a favor de uma combinação de corte de programas e aum
de impostos a fim de equilibrar os orçamentos do Estado. Próxima pergunta: que tal c
financiamentos para educação, saúde, transporte ou pensões. Ou aumentar o imposto
vendas, o imposto de renda estadual ou o imposto sobre os negócios? Nenhuma c
obteve apoio da maioria.

"A leitura mais plausível desses dados é que o público quer um almoço grátis", escr
economista Bryan Caplan. "Eles esperam que o governo gaste menos sem mexer em ne
ma de suas funções principais."[3] O economista Paul Krugman, ganhador do Prêmio N
disse: "O povo quer corte de despesas, mas se opõe a cortar qualquer coisa, exceto o a
ao exterior. … A conclusão é inevitável: os republicanos têm um mandato para recu
leis da aritmética."[4] O resumo da pesquisa sobre o orçamento feito pela Harris, em feve

retrato pouco lisonjeiro do público americano. Somos bebês incapazes de entende cortes orçamentários inevitavelmente reduzirão o financiamento de programas que a mos, ou somos crianças teimosas, irracionais, que entendem a matemática, mas se rec a aceitá-la.

Como podemos saber o que o público quer quando o público não produz algo qu sentido?

## Pessoas racionais, países irracionais

Desta vez, deixe-me tomar partido do povo americano, com a ajuda de um probler palavras.

Suponha que ⅓ do eleitorado julgue que devemos abordar o déficit aumentando imp sem cortar gastos; outro ⅓ acha que devemos cortar gastos com defesa; e o resto pens devemos cortar drasticamente os benefícios do Medicare – a assistência médica gr para idosos e aposentados.




Duas entre três pessoas querem cortar despesas. Numa pesquisa que pergunta “Dev cortar despesas ou aumentar impostos?”, os adeptos de cortes vencerão por uma ma maciça de 67 a 33.

Então, o que cortar? Se você pergunta, “Devemos cortar o orçamento da defesa?”, c um ressoante “Não”: ⅔ dos votantes – os que querem aumento de impostos e os que qu cortar o Medicare – preferem que a defesa conserve seu orçamento. E “Devemos co Medicare?” perde pela mesma proporção.

Essa é a familiar posição contraditória que observamos nas pesquisas: queremos c mas também queremos que cada programa mantenha seu financiamento. Como cheg a esse impasse? Não foi porque os votantes são estúpidos ou delirantes. *Cada votant uma postura política perfeitamente racional, coerente.* No entanto, no agregado, sua po é absurda.

Quando você escava além da camada superficial das pesquisas sobre orçamento, pe que o problema das palavras não está tão longe da verdade. Apenas 47% dos americ acreditavam que equilibrar o orçamento exigia cortar programas que ajudavam pe

cortados. Em outras palavras: o "americano médio" infantil, que quer cortar gastos exige a manutenção de cada programa, não existe. O americano médio acha que há profusão de programas federais sem importância que estão desperdiçando nosso din e ele está pronto e disposto a pôr esses programas sob o fio do machado a fim de fecl contas. O problema é que não há consenso sobre quais programas não têm importânci grande parte, isso ocorre porque a maioria dos americanos julga que programas q beneficiam pessoalmente são aqueles que devem, a todo custo, ser preservados. (E disse que não éramos egoístas, só disse que não éramos estúpidos!)

O sistema de "regras da maioria" é simples e elegante, e dá a sensação de ser justo ele é melhor quando se está decidindo apenas entre duas opções. Quando há mais de as contradições começam a impregnar as preferências da maioria. Enquanto escrev livro, os americanos estão acirradamente divididos em relação à assinatura de Obar documento de uma conquista em termos de política doméstica, o Affordable Car Numa pesquisa de outubro de 2010 entre prováveis votantes,[a7] 52% dos entrevis disseram que se opunham à lei, enquanto 41% a apoiavam. Más notícias para Obama? quando se destrinçam os números.

A revogação direta da reforma do sistema de saúde era favorecida por 37%, com c 10% dizendo que a lei devia ser abrandada. Mas 15% preferiam deixá-la como estava disseram que ela deveria ser expandida ainda *mais* para modificar o atual sistema de s Isso sugere que muitos dos oponentes à lei estão à esquerda de Obama, não à direita. há (pelo menos) três escolhas: deixar a lei de assistência médica como está, eliminá- fortalecê-la. Cada uma dessas opções sofre a oposição da maioria dos americanos.[b]

A incoerência da maioria cria oportunidades de sobra para o erro. Eis como a Fox reportaria os resultados dessa pesquisa: "Maioria dos americanos opõe-se ao Obamac Eis como apareceria na MSNBC: "Maioria dos americanos quer preservar ou fortale Obamacare!". As duas manchetes contam histórias muito diferentes sobre a opinião pú Por mais chato que seja, ambas são verdadeiras.

Mas ambas são incompletas. O pesquisador que não pretende se enganar precisa cada uma das opções da pesquisa para ver se ela se decompõe em peças de diferentes Cinquenta e seis por cento da população desaprova a política do presidente Oban Oriente Médio? Esses números impressionantes podem incluir tanto a esquerda do derramar sangue por petróleo" quanto a direita do tipo "bomba nuclear neles", cor poucos simpatizantes de Pat Buchanan e libertários devotos na mistura. Em si, eles nã contam praticamente nada sobre o que o povo realmente quer.

Eleições podem parecer um caso mais fácil. Um pesquisador apresenta a você simples escolha binária, a mesma com que você irá se deparar na urna: candidato candidato 2?

Mas às vezes há mais de dois candidatos. Na eleição presidencial de 1992, Bill Cl teve 43% do voto popular, à frente de George H.W. Bush, com 38%, e H. Ross Perot 19%. Em outras palavras: uma maioria dos eleitores (57%) achava que Bill Clinton não ser presidente. Uma maioria de eleitores (62%) achava que George Bush não dev

presidente. E uma maioria realmente grande de eleitores (81%) achava que Ross Perc
devia ser presidente. Nem todas as maiorias podem ser satisfeitas ao mesmo tempo.
das maiorias não chega a mandar.

Esse não parece ser um problema tão terrível, você sempre pode conceder a Presid
ao candidato com contagem de votos mais alta, que, à parte questões referentes ao co
eleitoral, é o que faz o sistema eleitoral americano.

Mas suponha que 19% dos eleitores que votaram em Perot se dividam em: 13%
julgam Bush como a segunda melhor escolha e Clinton o pior dos piores[d] e 6% que acre
que Clinton é o melhor dos dois candidatos dos partidos grandes. Então, se você pergu
aos eleitores diretamente se preferiam Bush ou Clinton como presidente, 51%, a ma
escolheriam Bush. Nesse caso, você ainda acha que o público quer Clinton na Casa Br
Ou será que é Bush o preferido pela maioria das pessoas, a escolha do povo? Por q
sentimentos do eleitorado em relação a Ross Perot ficariam afetados se Bush ou Cl
chegasse à Presidência?

Acho que a resposta certa é que não há respostas. A opinião pública não existe.
precisamente, às vezes existe, referente a assuntos sobre os quais há uma clara vis
maioria. É seguro dizer que, segundo a opinião pública, o terrorismo é ruim e *The Big
Theory* é um excelente programa. Mas cortar o déficit é outra história. As preferênc
maioria não se fundem numa posição definitiva.

Se não existe algo como opinião pública, o que deve fazer um político eleito? A res
mais simples: quando não há mensagem coerente da população, faça o que bem ente
Como vimos, a lógica simples exige que você às vezes aja contrariamente à vonta
maioria. Se você é um político medíocre, esse é o momento em que declara que os dad
pesquisa se contradizem. Se você é um político bom, você diz: "Eu fui eleito para li
não para dar atenção às pesquisas."

Se você é um mestre em política, descobre meios de virar a incoerência da opinião pu
a seu favor. Naquela pesquisa da Pew de fevereiro de 2011, apenas 31% dos entrevis
apoiavam uma redução nos gastos em transportes, e outros 31% apoiavam cortar v
para escolas, mas apenas 41% apoiavam um imposto sobre as atividades econômicas
para pagar tudo. Em outras palavras, cada uma das principais opções para cortar o d
do Estado sofria oposição de uma maioria de eleitores. Qual deveria ser a opção esco
pelo governador para minimizar o custo político? Resposta: não escolha uma, escolha
O discurso é mais ou menos o seguinte: "Eu me comprometo a não subir um único ce
de impostos. Darei às municipalidades as ferramentas de que necessitam para for
serviços públicos de primeira qualidade, com custo menor para os contribuintes."

Agora cada localidade, suprida com menos receita pelo Estado, tem de decidir so
entre as opções remanescentes: cortar vias públicas ou cortar escolas. Está vendo
genialidade? O governador excluiu especificamente o aumento de impostos, a mais po
das três opções. No entanto, sua postura firme tem apoio da maioria: 59% dos ele
concordam com o governador, que os impostos não devem ser aumentados. Coitad
prefeito ou do Executivo local, que precisa descer o machado. Esse pobre infeliz não
alternativa a não ser executar uma política da qual a maioria dos eleitores não vai g

sofrendo as consequências, enquanto o governador sai bem na foto. No jogo do orçan como em tantos outros, jogar primeiro pode ser uma grande vantagem.

## Vilões muitas vezes merecem o chicote, e talvez ter suas orelhas cortadas

É errado executar prisioneiros mentalmente pouco desenvolvidos? Isso soa como questão ética abstrata, mas foi assunto candente num importante caso na Suprema ( Mais precisamente, o problema não era "É errado executar prisioneiros mentalmente p desenvolvidos?", mas "Os americanos acreditam que é errado executar prisioneiros m mente pouco desenvolvidos?". Essa é uma questão de opinião pública, não de ética, e, vimos, as questões mais simples de opinião pública estão infestadas de paradoxos e c sões. Esta não está entre as mais simples.

Os juízes deram de cara com esse problema em 2002, no caso Atkins vs. Virgínia. Renard Atkins e um comparsa, William Jones, assaltaram um homem à mão arı sequestraram-no e depois o mataram. Cada um testemunhou que fora o outro quem ap o gatilho, mas o júri acreditou em Jones, e Atkins foi condenado por crime cap sentenciado à morte.

Nem a qualidade da evidência nem a seriedade do crime estavam em debate. A qu da corte não era o que Atkins tinha feito, mas o que ele era. O advogado do réu argum perante a Suprema Corte da Virgínia que Atkins sofria de leve retardo metal, com u de 59, e como tal não podia ser considerado responsável do ponto de vista moral receber a pena de morte. A Suprema Corte estadual rejeitou o argumento, citar determinação da Suprema Corte dos Estados Unidos, de 1989, em Penry vs. Lynau que a punição capital de prisioneiros mentalmente pouco desenvolvidos não viol Constituição.

Essa conclusão não foi alcançada sem grande controvérsia entre os juízes da Virgín questões constitucionais envolvidas eram difíceis o bastante para que a Suprema Cor Estados Unidos concordasse em revisitar o caso, e com ele o caso Penry. Dessa Suprema Corte veio para o lado oposto. Numa decisão de seis a três, determinou-s seria inconstitucional executar Atkins ou qualquer outro criminoso mentalmente atra

À primeira vista, isso parece esquisito. Nenhum aspecto relevante da Constituição m entre 1989 e 2012. Como poderia esse documento primevo permitir uma punição e 2 depois proibi-la? A chave reside na formulação da Oitava Emenda, que proíbe aos es impor "punição cruel e incomum". A questão de definir, precisamente, o que cor crueldade e algo fora do comum tem sido tema de enérgica disputa legal. O significac palavras é difícil de precisar. Será que "cruel" significa o que os Pais Fundadores t considerado cruel ou o que nós fazemos? Será que "incomum" significa incomum na época ou incomum agora? Os que elaboraram a Constituição não deixavam de ter ciência dessa ambiguidade essencial. Quando a Câmara dos Representantes deba adoção da Carta de Direitos, em agosto de 1789, Samuel Livermore, de New Hamp argumentou que o formato vago da linguagem permitiria que gerações futuras mais

A cláusula parece expressar grande dose de humanidade, em relação à qual não tenho objeção. Mas como ela sem sentido. Não a julgo necessária. O que se entende pelo termo fiança excessiva? Quem devem ser os juízes se entende por multas excessivas? Cabe à corte determinar. Não se deve infligir punição cruel e incomum. Às necessário enforcar um homem, vilões muitas vezes merecem o chicote, e talvez ter suas orelhas cortadas. Mas s no futuro impedidos de infligir essas punições, por serem elas cruéis?[8]

O pesadelo de Livermore tornou-se real. Agora não cortamos as orelhas das pe mesmo que estejam pedindo por isso; e mais, sustentamos que a Constituição nos proi fazê-lo. A jurisprudência da Oitava Emenda agora é governada pelo princípio de "pa de decência em evolução", pela primeira vez articulado pela corte no caso Trop vs. I (1958), que sustenta que as normas americanas contemporâneas, e não os padrões p minantes em agosto de 1789, fornecem o parâmetro do que é cruel e do que é incomu

Aí entra a opinião pública. No caso Penry, o parecer da juíza Sandra Day O'Co sustentava que pesquisas de opinião mostrando que a esmagadora oposição púb execução de criminosos mentalmente deficientes não devia ser levada em consideraç cômputo de "padrões de decência". Para ser considerada pela corte, a opinião pu necessitaria ser codificada em lei pelos legisladores estaduais, uma lei que representa evidência objetiva mais clara e mais confiável de valores contemporâneos". Em 1989, a dois estados, Geórgia e Maryland, haviam tomado medidas especiais para proibir a exe das pessoas pouco desenvolvidas mentalmente. Em 2002, a situação tinha mudado, e execuções eram proibidas em muitos estados. Até na legislatura do Texas tal lei pa embora ela tenha sido vetada pelo governador. A maioria da corte sentia que a onda c era prova suficiente de que os padrões de decência tinham evoluído, distanciando- permissão de executar a pena de morte no caso de Daryl Atkins.

O juiz Antonin Scalia não entrou nessa. Em primeiro lugar, ele reconhece apenas c vontade que a Oitava Emenda proíbe punições (como cortar orelhas de um crimi conhecida no contexto penal como "poda") permitidas no tempo dos insurgentes.[e]

Mesmo concedendo nesse ponto, escreve Scalia, as legislaturas estaduais demonstraram um consenso nacional contra a execução de prejudicados mentais, requer o caso precedente de Penry:

A corte menciona esses precedentes ao extrair miraculosamente um "consenso nacional" proibindo execu pessoas mentalmente retardadas, … a partir do fato de que dezoito estados – menos da metade (47%) dos 38 que permitem a pena capital (para quem a questão existe) – recentemente decretaram legislação barrando a ex dos deficientes mentais. … O simples número de estados – dezoito – deveria bastar para convencer qualquer razoável de que não existe "consenso nacional". Como é possível que a concordância entre 47% das jurisdiç admitem pena de morte represente um "consenso"?[9]

A regra da maioria fez a matemática de maneira diferente. Segundo seu cálculo, há estados que proíbem a execução de mentalmente prejudicados: os dezoito mencionad Scalia e os doze que proíbem inteiramente a pena capital. Isso perfaz trinta em cinque maioria substancial.

Que fração está correta? Akhil e Vikram Amar,[10] irmãos e professores de d constitucional, explicam, em base matemática, por que a maioria tem razão. Imagine, p eles, um cenário no qual 47 legislaturas estaduais tenham eliminado a pena capital, ma dos estados discordantes permitam a execução de condenados mentalmente defici

geral, e mais ainda a pena de morte para os prejudicados mentais. Concluir outra co: um bocado de autoridade moral aos três estados fora de compasso com o espírito nac A fração correta a ser considerada é 48 em cinquenta, e não um em três.

Na vida real, claramente não há consenso nacional sobre a pena de morte em si confere certo atrativo ao argumento de Scalia. São os doze estados que proíbem a pe morte[f] que estão fora de compasso com a opinião nacional geral em favor da punição ca Se eles não acham que as execuções deveriam ser permitidas de todo, como se pode que tenham opinião a respeito de quais execuções são permissíveis?

O erro de Scalia é o mesmo que sempre gera tropeços nas tentativas de dar sent opinião pública: a inconsistência de opiniões agregadas. Vamos decompor essa op Quantos estados acreditavam, em 2002, que a pena capital era moralmente aceitável? evidência na legislação, apenas doze. Em outras palavras, a maioria dos estados, 3 cinquenta, considerava a pena capital moralmente aceitável.

Agora, quantos estados acham que executar um criminoso com deficiência mental e legalmente falando, que executar qualquer outra pessoa? Certamente os vinte estadc concordam com ambas as práticas não podem ser contados. Tampouco os doze onde a capital é categoricamente proibida. Há somente dezoito estados que estabelecem a dist legal relevante. Isso é mais do que quando foi decidido o caso Penry, e no entanto ai minoria.

A maioria dos estados, 32 em cinquenta, inclui a pena capital para crimi mentalmente deficientes na mesma categoria legal que a pena capital de modo geral.[g]

Juntar essas afirmações parece uma questão de pura lógica: se a maioria acha que a capital em geral é aceitável, e se a maioria acha que a pena capital para criminosos me mente deficientes não é pior que a pena capital em geral, então a maioria deve apro pena capital para criminosos mentalmente prejudicados.

Mas isso está errado. Como vimos, "a maioria" não é uma entidade unificada, que regras lógicas. Lembre-se de que a maioria dos eleitores não queria que George H.W. fosse reeleito em 1992, e a maior parte dos eleitores não queria que Bill Clinton assum cargo de Bush. Contudo, por mais que H. Ross Perot tenha desejado, disso não se co que a maioria não queria nem Bush nem Clinton no Salão Oval.

O argumento dos irmãos Amar é mais persuasivo. Se você quer saber quantos es acham que executar deficientes mentais não é moralmente permissível, simplesmente gunte quantos estados consideram a prática ilegal. O número é trinta, e não dezoito.

O que não quer dizer que a conclusão geral de Scalia esteja errada e a opinião da ma correta. Trata-se de uma questão legal, não matemática. Para ser justo, sinto-me comp a ressaltar que Scalia também desfere alguns golpes matemáticos. A opinião majoritái juiz Stevens, por exemplo, menciona que a execução de prisioneiros mentalmente defic é rara mesmo em estados que não proíbem especificamente a prática, sugerindo haver resistência pública a tais execuções além daquela oficializada pelas legislaturas esta Em cinco estados apenas, escreve Stevens, foi realizada alguma execução dessas nos anos entre os casos Penry e Atkins.

Pouco mais de seiscentas pessoas foram executadas ao todo[11] nesses anos. Stevens fo

neiros mentalmente deficientes fossem executados na mesma taxa em que estão pres
na população geral, seria de esperar que seis ou sete desses prisioneiros tivessem sido le
à morte. Sob esta luz, como ressalta Scalia, a evidência não mostra nenhuma resist
particular para executar os deficientes mentais. Nenhum bispo grego ortodoxo jama
executado no Texas, mas pode-se duvidar de que o Texas mataria um bispo, se hou
necessidade?

A real preocupação de Scalia no caso Atkins não é tanto a questão precisa perante a
se ambos os lados concordam que o retardo mental afeta apenas um minúsculo segm
de casos capitais. Não, ele está preocupado com o que chama de "abolição increment
penas capitais por decreto judicial. E cita sua própria opinião anterior no caso Harmel
Michigan: "A Oitava Emenda não é um trinco com trava, por meio do qual um con
temporário de leniência para um crime particular fixa um máximo constitucional pe
nente, incapacitando os estados de efetivar crenças alteradas e de responder a mudanç
condições sociais."

Scalia tem razão de ficar preocupado por causa de um sistema no qual os caprich
uma geração de americanos acabam imobilizando constitucionalmente nossos descen
tes. Mas está claro que sua objeção é mais que legal. Sua preocupação é que os Es
Unidos percam o hábito da punição por desuso forçado, que os Estados Unidos não
vejam impedidos de matar assassinos mentalmente deficientes, em virtude do mecan
leniente da corte, mas acabem se esquecendo do que realmente querem. Scalia – de f
muito semelhante a Samuel Livermore duzentos anos atrás – prevê e deplora um mun
qual a população perca, por centímetros, sua capacidade de impor punições efetiva
malfeitores. A imensa engenhosidade da espécie humana para divisar meios de pu
pessoas rivaliza com nossas habilidades em arte, filosofia e ciência. A punição é um re
renovável, não há o risco de ela se esgotar.

## Flórida 2000, o bolor limoso e como escolher uma companheira de balad

O bolor limoso *Physarum polycephalum* é um pequeno organismo charmoso. Ele
grande parte da vida numa única célula minúscula, parente próximo da ameba. Ma
condições certas, milhares desses organismos coalescem num coletivo unificado cha
plasmódio. Nesta forma, o bolor limoso é amarelo intenso e grande o bastante para ser
a olho nu. Na natureza, ele habita plantas podres. No laboratório, ele realmente adora

Você não pensaria que houvesse muito a dizer sobre a psicologia do bolor li
plasmodial, que não tem cérebro nem nada que possa ser chamado de sistema ner
muito menos sentimentos ou pensamentos. Mas um bolor limoso, como toda criatura
toma decisões. O interessante é que ele toma decisões *muito boas*. No mundinho lim
do bolor limoso, essas decisões mais ou menos se reduzem a "mover-me na direção de c
de que eu gosto" (aveia) e "mover-me para longe de coisas de que eu não gosto" (luz f
De algum modo, o processo de pensamento descentralizado do bolor limoso é cap
fazer o serviço com muita eficácia. Por exemplo, é possível treinar um bolor limoso a c

por um labirinto.[12] (Isso leva muito tempo e muita aveia.) Os biólogos têm esperan que, entendendo como o bolor limoso navega pelo seu mundo, possam abrir uma j para a aurora evolutiva da cognição.

Mesmo aqui, no mais primitivo tipo de tomada de decisão que se possa ima encontramos alguns fenômenos intrigantes. Tanya Latty e Madeleine Beekman,[13] da versidade de Sydney, estavam estudando a maneira como os bolores limosos lidavam escolhas difíceis. Uma escolha difícil para um bolor limoso é mais ou menos assim: c lado da placa de Petri há 3 gramas de aveia; do outro lado, 5 gramas de aveia, mas com luz ultravioleta incidindo sobre ela. Colocamos o bolor limoso no centro do prato. ( ele faz?

Nessas condições, descobriram as pesquisadoras, o bolor limoso escolhe cada alterı aproximadamente metade das vezes – a comida extra é exata para contrabalançar a sen desagradável da luz ultravioleta. Se você fosse um economista clássico do tipo I Ellsberg, trabalhando para a Rand, diria que o montinho menor de aveia no escuı montinho maior sob a luz têm a mesma quantidade de utilidade para o bolor limoso portanto, é ambivalente em relação às alternativas.

Substitua, porém, os 5 gramas por 10 gramas, e o equilíbrio se rompe. O organisn toda vez atrás do montinho duplo, haja ou não luz. Experimentos como esse nos ens acerca das prioridades do bolor limoso e como ele toma decisões quando essas priori estão em conflito. E fazem o serzinho parecer um personagem bastante razoável.

Mas aí aconteceu uma coisa estranha. As pesquisadoras tentaram colocar o bolor li numa placa de Petri com *três* opções: os 3 gramas de aveia no escuro (3-escuro), os 5 gı de aveia sob a luz (5-luz) e 1 grama de aveia no escuro (1-escuro). Seria de prever organismo quase nunca fosse para 1-escuro; o montinho 3-escuro tem mais aveia e es escuro, então, é claramente superior. De fato, o bolor limoso quase nunca escolhe 1-es

Pode-se imaginar também que, uma vez que o bolor limoso considerava 3-escuro e igualmente atraentes, ele continuaria a fazê-lo no novo contexto. Nos termos dos econ tas, a presença de uma nova opção não deveria mudar o fato de que 3-escuro e 5-luz mesma utilidade. Mas não: quando 1-escuro é uma possibilidade, o bolor limoso realı muda suas preferências: passa a escolher 3-escuro mais que o triplo de vezes que esco luz!

O que se passa?

Aí vai uma dica: o montinho pequeno no escuro está fazendo o papel de H. Ross nesse cenário.

O jargão matemático altissonante em jogo aqui é "independência de altern relevantes". Essa é uma regra que diz: se você é um bolor limoso, um ser humano ou nação democrática, se tiver uma escolha entre opções A e B, a presença de uma te opção C não deveria afetar sua preferência por A ou B. Se você está decidindo se p comprar um Prius ou um Hummer, não importa que também tenha a opção de um Pinto. Você *sabe* que não vai escolher o Ford. Então, que relevância ele pode ter?

Ou, mantendo o foco mais perto da política: em vez de uma revendedora de autom ponha o estado da Flórida. Em lugar do Prius, ponha Al Gore. Em lugar do Hummer, G

W. Bush. E em lugar do Ford Pinto, ponha Ralph Nader. Na eleição presidencial de George Bush obteve 48,85% dos votos na Flórida e Al Gore, 48,84%. O Ford Pinto c 1,6%.

Então, aí vai o mistério sobre a Flórida em 2000. Ralph Nader jamais ganharia os eleitorais[h] na Flórida. Você sabe disso, eu sei disso e todo eleitor no estado da Flórida disso. O que se estava perguntando aos eleitores da Flórida na realidade não era

"Quem deveria ganhar os votos eleitorais da Flórida: Gore, Bush ou Nader?"

e sim

"Gore ou Bush deve ganhar os votos eleitorais da Flórida?"

É seguro dizer que, virtualmente, todo eleitor de Nader achava que Al Gore seri presidente melhor que George Bush.[i] Isso equivale a dizer que uma sólida maioria d dos eleitores da Flórida preferia Gore a Bush. Todavia, a presença de Ralph Na alternativa irrelevante, significou a vitória de Bush na eleição.

Não estou dizendo que a eleição deveria ter sido decidida de outra maneira. N verdade é que esses votos produzem resultados paradoxais, nos quais a maioria nem se consegue as coisas do seu jeito, e alternativas irrelevantes controlam o resultado. Bill Cl foi o beneficiário em 1992, George W. Bush em 2000, mas o princípio matemátic mesmo: é difícil dar sentido ao enunciado "O que os eleitores realmente querem".

No entanto, a maneira como decidimos as eleições nos Estados Unidos não é a únic início isso pode parecer esquisito. Que escolha, a não ser o candidato que tem mais poderia ser justa?

Eis como um matemático pensaria sobre esse problema. Na verdade, eis com matemático – Jean-Charles de Borda, um francês do século XVIII que se distinguiu p trabalho em balística – *realmente* pensou sobre o problema. Uma eleição é uma má Gosto de pensar nela como um grande moedor de carne de ferro fundido. O que ent máquina são as preferências dos eleitores individuais. A pasta espichada que sai do lado, depois de se girar a manivela, é o que chamamos de vontade popular.

O que nos incomoda em relação à derrota de Al Gore na Flórida? É que mais preferia Gore a Bush, e não o inverso. Por que o nosso sistema eleitoral não sabe Porque as pessoas que votaram em Nader não tinham jeito de exprimir sua preferênc Gore em vez de Bush. Estamos deixando de fora de nossa computação alguns relevantes.

Um matemático diria: "Você não deve deixar de fora informação que possa ser rele para o problema que está tentando resolver!"

Um fabricante de salsichas diria: "Já que você está moendo carne, use a vaca inteir

Ambos haveriam de concordar que se deve achar um jeito de levar em conta t conjunto de preferências das pessoas – e não só o candidato de quem elas gostam Suponha que a urna da Flórida permitisse listar os três candidatos na ordem de prefer

| | |
|---|---|
| Bush, Gore, Nader | 49% |
| Gore, Nader, Bush | 25% |
| Gore, Bush, Nader | 24% |
| Nader, Gore, Bush[j] | 2% |

O primeiro grupo representa "republicanos", e o segundo grupo, "democratas libera terceiro grupo são "democratas conservadores", para quem Nader era um pouquinho de E o quarto grupo, bem, sabe, são "as pessoas que votaram em Nader".

Como fazer uso dessa informação adicional? Borda sugeriu uma regra simples e ele É possível dar pontos a cada candidato segundo sua colocação: havendo três candidat 2 para o primeiro colocado, 1 para o segundo e 0 para o terceiro. Nesse cenário, Bush g dois pontos de 49% dos eleitores e 1 ponto de 24%, perfazendo

$$2 \times 0{,}49 + 1 \times 0{,}24 = 1{,}22$$

Gore obtém 2 pontos de 49% e 1 ponto de outros 51%, ou uma contagem de 1, Nader obtém 2 pontos dos 2% que mais gostam dele e outro ponto dos 25% lib chegando em último, com 0,29.

Então Gore chega em primeiro lugar, Bush em segundo, Nader em terceiro. Isso com o fato de que 51% dos eleitores preferem Gore a Bush, 98% preferem Gore a Na 73% preferem Bush a Nader. Todas as três maiorias estão presentes!

E se os números fossem ligeiramente alterados? Digamos, passe 2% dos eleitor "Gore, Nader, Bush" para "Bush, Gore, Nader". O resultado ficaria assim:

| | |
|---|---|
| Bush, Gore, Nader | 51% |
| Gore, Nader, Bush | 23% |
| Gore, Bush, Nader | 24% |
| Nader, Gore, Bush | 2% |

Agora, a maioria dos habitantes da Flórida gosta mais de Bush que Gore. Na ver uma maioria absoluta deles tem Bush como primeira escolha. Mas Gore ainda ven longe a contagem de Borda, 1,47 a 1,26. O que põe Gore no topo? É a presença de "Alternativa Irrelevante" Nader, o mesmo cara que estragou a votação de Gore na eleiç 2000. A presença de Nader na urna empurra Bush para baixo, para o terceiro luga muitas urnas, custando-lhe pontos, enquanto Gore desfruta o privilégio de jamais fic último, porque as pessoas que não gostam dele gostam ainda menos de Nader.

O que nos traz de volta ao bolor limoso. Lembre-se, o bolor limoso não tem um cé para coordenar sua tomada de decisão, apenas milhares de núcleos dentro do plasm cada qual forçando o coletivo em uma ou outra direção. De algum modo, o bolor li precisa agregar a informação disponível para uma decisão.

Se o bolor limoso estivesse decidindo puramente com base em quantidade de co classificaria 5-luz em primeiro, 3-escuro em segundo e 1-escuro em terceiro. Se u somente a escuridão classificaria 3-escuro e 1-escuro empatados em primeiro, com em terceiro

Essas classificações são incompatíveis. Então, como o bolor limoso decide prefe escuro? O que Latty e Beekman especulam é que o organismo usa alguma forn *democracia* para escolher entre essas duas opções, via algo como a contagem de E Digamos que 50% dos núcleos do bolor limoso se importem com comida e 50% se impo com luz. A contagem de Borda teria o seguinte aspecto:

| | |
|---|---|
| 5-luz, 3-escuro, 1-escuro | 50% |
| 1-escuro e 3-escuro, 5-luz | 50% |

5-luz tem dois pontos de metade do bolor limoso que se importa com comida e ze metade do bolor limoso que se importa com luz, para uma pontuação total de

$$2 \times (0{,}5) + 0 \times (0{,}5) = 1.$$

Num empate, no primeiro lugar, damos a ambos os competidores 1,5 ponto; ent escuro recebe 1,5 ponto de metade do organismo e um da outra metade, ficando com E a opção inferior, 1-escuro, não recebe nada da metade do organismo que adora co que está na última colocação, e 1,5 da metade que detesta luz, que empata em primeiro um total de 0,75. Então 3-escuro vem em primeiro, 5-luz em segundo e 1-escuro em úl em conformidade com o resultado experimental.

E se a opção 1-escuro não existisse? Então, metade do bolor limoso classificaria acima de 3-escuro, e a outra metade classificaria 3-escuro acima de 5-luz. Tem-se um en que é exatamente o que aconteceu no primeiro experimento, no qual o bolor limoso esc entre o montinho de 3 gramas de aveia no escuro e o montinho de 5 gramas no claro.

Em outras palavras, o bolor limoso gosta do montinho de aveia pequeno sem ilumi tanto quanto gosta do monte grande superiluminado. Mas se você introduzir um mon de aveia *realmente* pequeno e mal-iluminado, em comparação, o monte pequeno no e parece melhor, tanto que o organismo decide escolhê-lo quase o tempo todo, em v escolher o monte grande iluminado.

Esse fenômeno chama-se "efeito de dominação assimétrica", e bolores limosos não s únicas criaturas sujeitas e ele. Biólogos descobriram gaios, abelhas e beija-flores[14] agin mesma maneira aparentemente irracional.

Para não mencionar os seres humanos! Aqui precisamos substituir aveia por par românticos. Os psicólogos Constantine Sedikides, Dan Ariely e Nils Olsen[15] deram a seg tarefa aos sujeitos de sua pesquisa de graduação:

> Vocês serão apresentados a diversas pessoas hipotéticas. Pensem nessas pessoas como possíveis parceiros de enc Vocês serão solicitados a escolher *a única pessoa* a quem convidariam para sair. Por favor, assumam que to possíveis parceiros são: 1) estudantes da Universidade da Carolina do Norte (ou da Duke University); 2) da etnia ou raça que vocês; 3) aproximadamente da mesma idade que vocês. Os possíveis parceiros de encontro descritos em termos de diversos atributos. Uma pontuação percentual acompanhará cada atributo. A por percentual reflete a posição relativa do possível parceiro quanto àquele traço ou característica, em comparaç estudantes da Universidade da Carolina do Norte (ou Duke) que sejam do mesmo gênero, raça e idade que o p parceiro.

Adam está no 81º percentil de atratividade, 51º percentil de confiança, e 65º percen

inteligência. As estudantes universitárias, como o bolor limoso antes delas, depararan uma escolha difícil. Exatamente como o bolor limoso, foram na base do 50-50, meta grupo preferindo cada namorado em potencial.

Mas as coisas mudaram quando Chris entrou em cena. Ele estava no 81º percen atratividade e no 51º de confiança, como Adam, mas apenas no 54º de inteligência. era a alternativa irrelevante, uma opção claramente pior que as outras escolhas já em c Você pode adivinhar o que aconteceu. A presença de uma versão ligeiramente mais bc Adam fez o verdadeiro Adam parecer ainda melhor. Dada a escolha entre sair com A Bill e Chris, ⅔ das mulheres escolheram Adam.

Então, se você é uma pessoa solteira, procurando o amor, e está decidindo qual comp levar para a balada, escolha aquela que é tão bonita quanto você, só que ligeiramente n desejável.

De onde vem a irracionalidade? Já vimos que a aparente irracionalidade da op popular pode surgir do comportamento coletivo de pessoas individuais perfeitar racionais. Mas pessoas individuais, como sabemos por experiência, *não são* perfeitar racionais. A história do bolor limoso sugere que os paradoxos e incoerências do comportamento cotidiano poderiam eles próprios ser explicáveis de modo mais sistem Talvez pessoas individuais pareçam irracionais porque na realidade não são indiví Cada um de nós é um pequeno Estado-nação fazendo o melhor possível para re disputas e estabelecer meios-termos entre as vozes discordantes que nos conduzem. sempre os resultados fazem sentido. Mas, de algum modo, permitem-nos, como no ca bolor limoso, bambolear adiante sem cometer muitos erros radicais. Democracia é bagunça, mas meio que funciona.

## Usar a vaca inteira na Austrália e em Vermont

Deixe-me contar como fazem na Austrália.

A cédula de votação parece muito com a de Borda. Você não marca somente o canc preferido, mas classifica *todos* os candidatos, desde o preferido até o que mais odeia.

O jeito mais fácil de explicar o que acontece depois é ver o que teria acontecido c Flórida em 2000 no sistema australiano.

Começamos contando os votos do primeiro lugar e eliminando o candidato qu menos votos – neste caso, Nader. Pode jogar ele fora! Agora estamos só com Bush e G

Mas justamente porque jogamos Nader fora isso não quer dizer que temos de joga as urnas em que as pessoas votaram nele. (Agora use a vaca inteira!) O passo seguin "transferência imediata" (*instant runoff*) – é o passo realmente engenhoso. Risque o de Nader de toda urna e volte a contar os votos, como se Nader jamais tivesse exi Agora Gore tem 51% dos votos de primeiro lugar: os 49% que teve na primeira conta mais os votos que costumavam ir para Nader. Bush ainda tem os 49% com os quais com Ele tem menos votos de primeiro lugar, portanto, é eliminado. E Gore é o vencedor.

E a nossa versão da Flórida em 2000 ligeiramente modificada, em que passamos c

contagem de Borda. Pelas regras australianas, a história é outra. Nader ainda é derru na primeira contagem, mas agora, já que 51% das urnas apontam Bush acima de Gore, é o vencedor.

O atrativo da votação de transferência imediata (ou "votação preferencial", co chamam na Austrália) é óbvio. Pessoas que gostam de Ralph Nader podem votar nel se preocupar de estar dando a corrida de bandeja para aquele que gostam menos del esse aspecto, Ralph Nader pode *concorrer* sem se preocupar de entregar a corrida p pessoa de quem gosta menos.[k]

A votação de transferência imediata existe há mais de 150 anos. É usada não Austrália, mas na Irlanda e em Papua Nova Guiné. Quando John Stuart Mill, que se teve um fraco pela matemática, ouviu falar da ideia, disse que estava "entre os ma melhoramentos já feitos na teoria e na prática de governo."[l] [16]

*E ainda assim…*

Vamos dar uma olhada naquilo que aconteceu na corrida de 2009 para a prefeitu Burlington, Vermont,[17] uma das únicas municipalidades americanas a usar o sister transferência imediata.[m] Prepare-se: estão por cair montes de números sobre você.

Os três principais candidatos eram Kurt Wright, republicano; Andy Montroll, demo e Bob Kiss, do Partido Progressista, de esquerda. (Havia outros candidatos menor corrida, contudo, no interesse da brevidade, vou ignorar seus votos.) Eis a contager urnas:

| | |
|---|---|
| Montroll, Kiss, Wright | 1.332 |
| Montroll, Wright, Kiss | 767 |
| Montroll | 455 |
| Kiss, Montroll, Wright | 2.043 |
| Kiss, Wright, Montroll | 371 |
| Kiss | 568 |
| Wright, Montroll, Kiss | 1.513 |
| Wright, Kiss, Montroll | 495 |
| Wright | 1.289 |

(Como você pode ver, nem todo mundo estava a par do sistema de votação de vangu Algumas pessoas simplesmente marcaram a primeira escolha.)

Wright, o republicano, obtém 3.297 votos de primeiro lugar ao todo; Kiss obtém 2. Montroll obtém 2.554. Se você já esteve em Burlington, provavelmente sente-se segu dizer que um prefeito republicano não era a vontade da população. Mas, pelo si americano tradicional, Wright teria ganhado a eleição, graças à divisão de votos en dois candidatos mais liberais.

O que de fato aconteceu foi inteiramente diferente. Montroll, o democrata, teve a n quantidade de votos de primeiro lugar, e assim foi eliminado. Na contagem seguinte, Wright mantiveram cada um os votos de primeiro lugar que já tinham, mas as 1.332 que costumavam dizer "Montroll, Kiss, Wright" agora diziam simplesmente "Kiss, Wı

e os votos eram computados para Kiss. De maneira similar, os 767 votos "Montroll, W
Kiss" foram computados para Wright. Resultado final: Kiss, 4.314, Wright, 4.064 e
reeleito.

Soa bem, não? Mas espere um minuto. Somando os números de outra maneira,
pode verificar que 4.067 eleitores gostavam mais de Montroll que de Kiss, enquanto a
3.477 gostavam de Kiss mais que de Montroll. E 4.597 eleitores preferiam Montroll a W
mas penas 3.668 preferiam Wright a Montroll.

Em outras palavras, uma maioria de eleitores gostava do candidato de centro Mo
mais que de Kiss, e uma maioria de eleitores gostava de Montroll mais que de Wright
é um caso bastante sólido de Montroll como merecido vencedor – e, no entanto, Mo
foi jogado fora na primeira contagem. Aqui você vê uma das fraquezas do voto por tra
rência imediata. Um candidato de centro do qual todo mundo gosta, mas não é a pri
escolha de ninguém, tem grande dificuldade de ganhar.

Resumindo:

Método de votação tradicional americano: Wright vence.
Método da transferência imediata: Kiss vence.
Confronto direto: Montroll vence.

Ainda confuso? A coisa fica ainda pior. Suponha que esses 495 eleitores que escrev
"Wright, Kiss, Montroll" tivessem se decido a votar em Kiss, deixando os outros
candidatos fora do voto. E digamos que trezentos dos votantes em "Wright apenas" tam
trocassem para Kiss. Agora Wright perdeu 795 de seus votos de primeiro lugar, fazen
cair para 2.502; então ele, e não Montroll, é eliminado na primeira contagem. A eleiçã
apenas entre Montroll e Kiss, e Montroll ganha, 4.067 a 3.777.

Viu o que acabou de acontecer? Demos mais votos a Kiss e, em vez de ganhar, ele pe

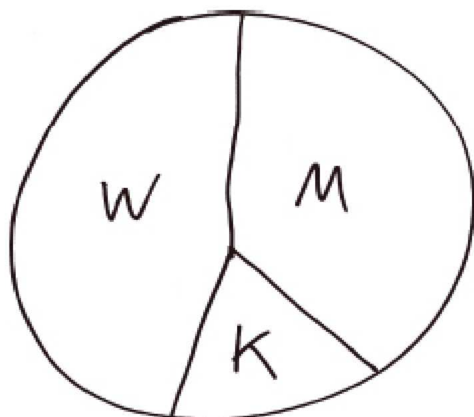
Tudo bem se a essa altura você está meio tonto.

Mas apegue-se ao seguinte para se firmar: pelo menos temos algum sentido razoá
quem *devia* ter ganhado a eleição. É Montroll, o democrata, o sujeito que vence tanto W
quanto Kiss nos confrontos diretos. Talvez devêssemos jogar fora toda essa contage
Borda e as transferências e simplesmente eleger o candidato preferido pela maioria.

Você não está com a sensação de que eu estou armando alguma coisa para der
você?

## O carneiro furioso se debate com o paradoxo

Vamos simplificar as coisas um pouquinho em Burlington. Suponha que houvesse a
três tipos de voto:




| | |
|---|---|
| Montroll, Kiss, Wright | 1.332 |
| Kiss, Wright, Montroll | 371 |
| Wright, Montroll, Kiss | 1.513 |

Uma maioria de eleitores – todo mundo nas fatias da pizza marcadas com K e W – p Wright a Montroll. E outra maioria, as fatias M e K, prefere Kiss a Wright. Se a maior pessoas gosta mais de Kiss que de Wright, e a maioria gosta mais de Wright que de Mo isso não significa que Kiss deveria ganhar outra vez? Há somente um probleminl pessoas gostam mais de Montroll que de Kiss por sonoros 2.845 a 371. Existe aí um bi triângulo de votação: Kiss ganha de Wright, Wright ganha de Montroll, Montroll gan Kiss. *Todo* candidato perderia o confronto direto com um dos outros dois. Então, pode alguém merecidamente ocupar o cargo?

Situações circulares incômodas como essa são chamadas *paradoxos de Condorce* referência ao filósofo francês do Iluminismo que primeiro as descobriu, no fim do s XVIII. Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, marquês de Condorcet, era um proemi pensador liberal nos primórdios da Revolução Francesa, vindo a tornar-se presider Assembleia Legislativa. Era um político improvável – tímido e propenso à exaustão um estilo de falar tão baixo e apressado que suas propostas muitas vezes não eram ou na ruidosa Câmara revolucionária. Por outro lado, exasperava-se facilmente com pe cujos padrões intelectuais não estavam à altura do seu. Essa combinação de timi temperamento forte levou seu mentor, Jacques Turgot, a apelidá-lo *le mouton enrag* carneiro furioso".

A virtude política que Condorcet realmente possuía era uma crença apaixonada e re na razão, em especial na matemática, como princípio organizador dos assuntos hum Sua lealdade à razão era matéria-padrão para os pensadores do Iluminismo, mas sua c adicional de que o mundo moral e social podia ser analisado por fórmulas e equaçõ novidade. Ele foi o primeiro cientista social no sentido moderno. (O termo usad Condorcet era "matemática social".) Condorcet, nascido na aristocracia, logo che conclusão de que as leis universais do pensamento deviam ter precedência sobre os capr dos reis. E concordava com a alegação de Rousseau, de que a "vontade geral" do povo ser referência para os governos. Contudo, não se satisfazia, como Rousseau, em aceita argumento como princípio evidente. Para Condorcet, a regra da maioria precisa justificação matemática, e ele descobriu uma na teoria da probabilidade.

Condorcet apresenta sua teoria no tratado *Essai sur l'application de l'analyse à la prob des décisions rendues à la pluralité*, de 1785. Uma versão simples: suponha que um ju sete pessoas tenha de decidir acerca da culpa de um réu. Quatro dizem que o réu é cul apenas três acreditam que ele é inocente. Digamos que cada um desses cidadãos tenh de chance de estar correto. Nesse caso, seria de esperar que uma maioria de quatro a t direção correta seja mais provável que uma maioria de quatro a três favorecendo a incorreta.

Isso é meio parecido com as World Series, no beisebol. Se os Phillies e os Tigers es enfrentando diretamente, e nós concordamos que os Phillies são um pouquinho mel que os Tigers – digamos, eles têm 51% de chance de ganhar cada jogo –, então os P têm maior probabilidade de ganhar as Series de quatro a três que perdê-la pela m margem. Se as World Series fossem em melhor de quinze jogos, em vez de sete, a vant dos Phillies seria ainda maior.

O chamado "teorema do júri" de Condorcet mostra que um júri grande o suficient probabilidade de chegar ao resultado correto, contanto que os jurados tenham uma tend individual para serem corretos, não importa quão pequena seja ela.[n] Se a maioria das pe acredita em algo, dizia Condorcet, isso deve ser tomado como forte evidência de qu algo está correto. Estamos matematicamente justificados ao confiar numa maioria gra suficiente – mesmo que isso contradiga nossas próprias crenças preexistentes. "Dev não pelo que eu pense ser razoável", escreveu Condorcet, "mas pelo que todos, com tendo abstraído sua própria opinião, devem encarar como de acordo com a razã verdade."[19] O papel do júri é muito parecido com o papel da audiência em *Quem qu um milionário?*. Quando temos a chance de inquirir um coletivo, Condorcet pensava, m um coletivo de pares desconhecidos e não qualificados, devemos valorizar sua op majoritária acima da nossa própria opinião.

A pedante e detalhada abordagem de Condorcet fez dele o favorito dos esta americanos de inclinação científica, como Thomas Jefferson (com quem ele comparti um fervoroso interesse pela padronização das unidades de medida). John Adams, ao trário, não encontrava uso para Condorcet – nas margens dos livros de Condorc qualificava o autor de "impostor" e "charlatão matemático".[20] Adams via Condorcet um incorrigível e delirante teórico cujas ideias jamais poderiam funcionar na prát como má influência sobre Jefferson, que tinha as mesmas inclinações. Realmente, a C tuição girondina de Condorcet, de inspiração matemática, com sua intrincada seleç regras, nunca foi adotada, nem na França nem em nenhum outro lugar. Do lado posit prática de Condorcet de seguir ideias até suas conclusões lógicas levou-o a insistir, sozinho entre seus pares, que a muito discutida Declaração dos Direitos do Homem pert também às mulheres.

Em 1770, Condorcet, então com 27 anos, e seu mentor matemático, Jean le d'Alembert, coeditor da *Encyclopédie*, fizeram uma extensa visita à casa de Voltaire Ferney, na fronteira com a Suíça. O matemátofilo Voltaire, então na casa dos setenta a saúde frágil, logo adotou Condorcet como seu favorito, vendo no jovem promisso maior esperança de transmitir os princípios do Iluminismo racionalista para a ge

*éloge* formal para a Academia Real sobre o velho amigo de Voltaire, La Condamine tornara Voltaire rico com seu esquema de loteria. Voltaire e Condorcet logo estabelec uma vigorosa correspondência, o mais novo mantendo o mais velho a par dos úl acontecimentos políticos em Paris.

Algum atrito entre ambos surgiu a partir de outro dos *éloges* de Condorcet, escrito Blaise Pascal. Condorcet com justiça elogiou Pascal como grande cientista. Sem o dese vimento da teoria da probabilidade, lançada por Pascal e Fermat, Condorcet não pc ter realizado seu trabalho científico. Condorcet, como Voltaire, rejeitava o raciocín aposta de Pascal, mas por razões diferentes. Voltaire achava a ideia de tratar ass metafísicos como um jogo de dados ofensiva e sem seriedade. Condorcet, como R.A. I depois,[22] tinha uma objeção mais matemática: não aceitava o uso da linguagem probabi para falar de temas como a existência de Deus, que não era literalmente governada probabilidade. Mas a determinação de Pascal de enxergar o pensamento e o comportar humanos por uma lente matemática era atraente para o vigoroso "matemático social".

Voltaire, por outro lado, achava o trabalho de Pascal guiado sobretudo por um fana religioso para o qual ele não via utilidade, e rejeitava a sugestão de Pascal de que a maten podia falar de assuntos além do mundo observável, considerando-a não somente e mas perigosa. Voltaire descreveu o *éloge* de Condorcet como "tão lindo que chegava assustador. … Se ele [Pascal] é um homem tão notável, o restante de nós é formad totais idiotas, por não sermos capazes de pensar como ele. Condorcet nos causará g mal se publicar este livro tal como me foi enviado".[23] Vê-se aqui uma legítima dife intelectual, mas também o arrufo enciumado de um mentor pelo flerte de seu prot com um adversário filosófico. Pode-se quase ouvir Voltaire dizendo: "Quem vai ser, eu?" Condorcet deu um jeito de nunca fazer a escolha (embora tenha se curvado a Vo e diminuído o tom dos elogios a Pascal em edições posteriores). Ele cindiu a difer combinando a devoção de Pascal à aplicação ampla de princípios matemáticos à fé so Voltaire na razão, no secularismo e no progresso.

Quando o tema chegou às eleições, Condorcet foi matemático até o último milín Uma pessoa típica poderia olhar os resultados da Flórida em 2000 e dizer: "Ah, estranho: um candidato mais de esquerda acabou virando a eleição em favor do republi Ou poderia olhar para Burlington em 2009 e dizer: "Ah, muito estranho: o sujeito de c de quem a maioria das pessoas basicamente gostava foi dispensado na primeira conta Para um matemático, essa sensação de "Ah, muito estranho" vem como um desafio in tual. Você pode dizer de um modo preciso o que *faz com que seja* estranho? Pode form o que significaria para um sistema eleitoral *não* ser estranho?

Condorcet achava que podia. Ele anotou um *axioma*, isto é, um enunciado consid tão evidente que dispensa justificativa. Ei-lo:

> Se a maioria dos eleitores prefere o candidato A ao candidato B, o candidato B não pode ser a escolha do povo.

Condorcet escreveu com admiração sobre o trabalho de Borda, mas conside

irracional pelo economista clássico. No sistema de Borda, como na votação por maic acréscimo de uma terceira alternativa pode transferir a votação do candidato A p candidato B. Isso viola o axioma de Condorcet: se A vencesse uma corrida de duas pe contra B, então B não pode ser vencedor de uma corrida de três pessoas que inclua A.

Condorcet pretendia construir uma teoria matemática da votação a partir de seu ax exatamente como Euclides construíra toda uma teoria da geometria com base nos seus axiomas sobre o comportamento de pontos, retas e círculos.

- Dois pontos distintos determinam uma única reta.
- Qualquer segmento de reta pode ser estendido para um segmento de reta de qua comprimento desejado.
- Para todo segmento de reta R há um círculo que tem R como raio.
- Todos os ângulos retos são congruentes entre si.
- Se P é um ponto e R uma reta não passando por P, existe exatamente uma passando por P e paralela a R.

Imagine o que aconteceria se alguém construísse um argumento geométrico complicado mostrando que os axiomas de Euclides levavam, inexoravelmente, a uma contradição. Será que isso é completamente impossível? Esteja avisado, a geometria al muitos mistérios. Em 1924, Stefan Banach e Alfred Tarski mostraram como fragment uma esfera em seis pedaços, mover os pedaços e reagrupá-los em duas esferas, cada u do tamanho da primeira. Por que isso é possível? Porque algum conjunto natural de axiomas que a nossa experiência pode nos levar a acreditar sobre corpos tridimensior seus volumes e seus movimentos simplesmente não podem ser todos verdadeiros, por mais intuitivamente corretos que pareçam. Claro que os pedaços de Banach-Tarski sã formas de extrema complexidade, nada que pudesse ser realizado no cruel mundo físi O modelo óbvio de negócios que quer comprar uma esfera de platina, fragmentá-la en pedaços de Banach-Tarski, juntar os pedaços em duas esferas e repetir o processo até uma carreta cheia de metal precioso não vai dar certo.

Se houvesse uma contradição nos axiomas de Euclides, os geômetras ficariam pira com razão, porque significaria que um ou mais dos axiomas nos quais eles se baseiar estariam de fato correto. Poderíamos fazer uma declaração até mais pungente – se h uma contradição nos axiomas de Euclides, isso significa que pontos, retas e círculo forma como Euclides os entendia, *não existem*.

ESSA É A DESAGRADÁVEL situação com a qual Condorcet se defrontou quando descobri paradoxo. No gráfico de pizza anterior, o axioma de Condorcet diz que Montroll não ser eleito porque perde no confronto direto para Wright. O mesmo vale para Wrigh perde para Kiss, e para Kiss, que perde para Montroll. Não existe essa coisa de es popular. Simplesmente não existe.

dificilmente ele pode ser aquele em que Kiss é melhor que Wright, que é melho Montroll, que é melhor que Kiss. Condorcet foi forçado a reconhecer que, na presen tais exemplos, seu axioma precisava ser relativizado: às vezes a maioria podia estar e Permanecia, porém, o problema de penetrar o nevoeiro da contradição para profet vontade real do povo – pois Condorcet jamais duvidou que isso existisse.

---

[a] Nos Estados Unidos, não é obrigatório votar. (N.T.)

[b] Acrescento no prelo: uma pesquisa da CNN/ORC, de maio de 2013, revelou que 43% favoreciam o Act, enquar diziam que ele era liberal demais e 16%, que não era liberal o bastante.

[c] Apelido dado ao Affordable Care Act. (N.T.)

[d] Pessoas debatem até hoje se Perot tirou mais votos de Bush ou de Clinton, ou se os eleitores de Perot teriam simple se abstido em vez de votar em qualquer um dos candidatos dos grandes partidos.

[e] Em 15 de maio de 1805, Massachusetts proibiu a "poda", juntamente com marcas a ferro, o açoite e o pelourinh punições para falsificação de dinheiro. Se essas punições tivessem sido entendidas como proibidas pela Oitava E na época, a lei estadual não teria sido necessária (Joseph Barlow Felt, *A Historical Account of Massachusetts C* p.214). A concessão de Scalia, aliás, não reflete seu pensamento corrente: numa entrevista de 2013 para a revista *Ne* ele disse que agora acredita que a Constituição admite surras, e presumivelmente sente o mesmo em relação orelhas.

[f] Desde 2002, o número aumentou para dezessete.

[g] Esse não é precisamente o cálculo de Scalia. Ele não chegou a ponto de afirmar que os estados sem pena d consideravam a execução de criminosos com retardo mental igualmente ruim que as execuções em geral. Seu arg era de que não temos informação sobre a opinião desses estados a respeito do assunto, então, eles não dever computados no cálculo.

[h] São votos no colégio eleitoral. Lembramos que, na eleição americana, teoricamente, o vencedor pelo voto popu todos os votos do estado no colégio eleitoral. (N.T.)

[i] Sim, eu também conheço aquele sujeito único que achava que tanto Gore quanto Bush eram instrumentos dos s capitalistas, que não fazia diferença quem ganhasse. Não estou falando desse sujeito.

[j] Seguramente, houve gente gostando mais de Nader e preferindo Bush a Gore, ou gostando mais de Bush e pre Nader a Gore, mas minha imaginação não é forte o suficiente para compreender que tipo de gente é essa, ent presumir que seus números sejam pequenos demais para afetar substancialmente o cálculo.

[k] Reconheço que não está claro se Ralph Nader realmente se preocupa com isso.

[l] Para ser preciso, Mill estava na verdade falando sobre o intimamente correlato sistema de "voto único transferíve

[m] Porém, não mais. Num referendo decidido por estreita margem, os eleitores de Burlington rejeitaram a votaç transferência imediata em 2010.

[n] É claro que aqui há uma porção de premissas: a mais evidente é que os jurados cheguem a seus julgamentos d independente um do outro, o que não está muito certo num contexto em que os jurados conferenciam antes de vo

# 18. “A partir do nada criei um estranho Universo novo”

CONDORCET ACHAVA QUE perguntas como “Quem é o melhor líder?” tinham algo par com uma *resposta certa*, e que os cidadãos eram mais ou menos semelhantes a instrum científicos para investigar esses problemas, sujeitos a desajustes nas medições, com ce mas em média bastante acurados. Para ele, democracia e regra da maioria eram forn não estar errado com a ajuda da matemática.

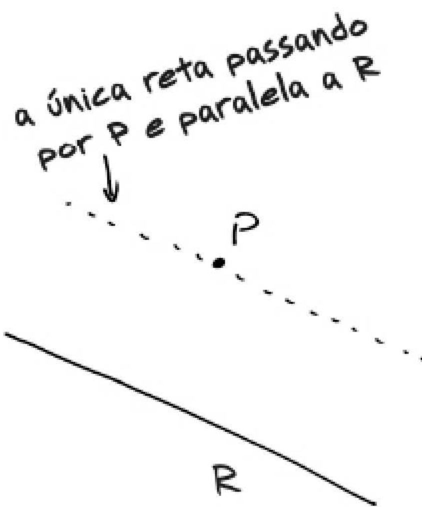
Agora não falamos de democracia da mesma maneira. Para a maioria das pe atualmente, o apelo da escolha democrática é que ela é *justa*. Falamos a linguager direitos e acreditamos, com base moral, que as pessoas deveriam ser capazes de esc seus próprios governantes, sejam as escolhas sensatas ou não.

Essa não é apenas uma discussão sobre política, é uma questão fundamental, q aplica a todo campo de empenho mental. Queremos descobrir o que é *verdadeir* tentamos descobrir que conclusões são permitidas segundo nossas regras e nossos pro mentos? Felizmente essas duas noções com frequência concordam; mas toda dificuld portanto todo material conceitualmente interessante, ocorre nos pontos em que elas gem.

Você pode pensar que, obviamente, na maior parte das vezes, queremos descobrir é verdadeiro. Mas nem sempre é esse o caso quando se trata de lei criminal, em diferença se apresenta de modo cru, na forma de réus que cometeram o crime, ma podem ser condenados (digamos, porque a evidência foi obtida de modo inadequad que são inocentes, porém, de toda forma, acabam condenados. O que é justiça? Pu culpados e libertar os inocentes, ou seguir os procedimentos criminais aonde quer qu nos levem? Em ciência experimental, já vimos a disputa entre R.A. Fisher, de um la Jerzy Neyman e Egon Pearson, de outro. Será que tentamos, como pensava Fisher, desc quais hipóteses devemos considerar verdadeiras? Ou devemos seguir a filosofia de Ney Pearson, na qual resistimos a pensar sobre a verdade das hipóteses e simplesmente in mos: que hipóteses devemos autenticar como corretas, sejam elas verdadeiras ou segundo as regras de inferência escolhidas?

Mesmo em matemática, em teoria, a terra da certeza, deparamos com esses probler não em algum misterioso reduto da pesquisa contemporânea, mas na velha e si geometria clássica. A matéria fundamenta-se nos axiomas de Euclides que indicam capítulo anterior. O quinto axioma,

“Se P é um ponto e R uma reta não passando por P, existe exatamente uma reta passando por P e paralela a R”




é um pouco engraçado, não? Por algum motivo, ele é um pouco mais complicado, um p
menos óbvio, que os demais. De qualquer maneira, foi assim que os geômetras o encar
durante séculos.[a] Acredita-se que o próprio Euclides não gostava muito do quinto ax
provando as 28 primeiras proposições nos *Elementos* apenas com os quatro primeiros

Um axioma deselegante é como uma mancha no canto do piso; em si, ela não atra
o caminho, mas é *de deixar louco*, e pode-se passar uma quantidade absurda de t
esfregando, polindo, tentando deixar a superfície limpa e bonita. No contexto matem
isso redundou em tentativas de mostrar que o quinto axioma, o chamado postulad
paralelas, era consequência dos outros. Se assim fosse, o axioma poderia ser retirado d
de Euclides, deixando-a impecável e reluzente.

No entanto, depois de 2 mil anos sendo esfregada, a mancha continuava lá.

Em 1820, o nobre húngaro Farkas Bolyai, que em vão dedicara anos da sua vi
problema, alertou seu filho János para não seguir o mesmo caminho:

> Você não deve tentar essa abordagem das paralelas. Conheço o caminho até o fim. Atravessei essa noite insondá
> extinguiu toda a luz e alegria da minha vida. Eu lhe suplico, deixe as paralelas em paz. … Eu estava pronto a me
> o mártir que removeria essa falha da geometria, devolvendo-a purificada à humanidade. Realizei tarefas en
> gigantescas; minhas criações são muito melhores que as de outros, todavia não obtive sucesso completo. … De
> volta quando vi que nenhum homem pode alcançar as profundezas da noite. Dei meia-volta inconsolável, com p
> mim mesmo e de toda a humanidade. Aprenda com o meu exemplo.[1]

Filhos nem sempre ouvem o conselho dos pais, e matemáticos nem sempre desisten
facilidade. O jovem Bolyai continuou trabalhando nas paralelas, e em 1823 havia delir
uma solução para o antigo problema. Escreveu de volta ao pai, dizendo:

> Descobri coisas tão maravilhosas que fiquei perplexo, e seria uma imensa má sorte se elas se perdessem. Quanc
> meu querido pai, as vir, compreenderá. No presente momento, nada posso dizer exceto isso: que *a partir do na*
> *um estranho Universo novo.*

O insight de János Bolyai foi atacar o problema de trás para a frente. Em vez de t
provar o postulado das paralelas a partir dos outros axiomas, permitiu à sua me
liberdade de indagar: e se o axioma das paralelas fosse falso? A consequência seria
contradição? Ele descobriu que a resposta para essa pergunta era "Não" – havia
*geometria*, não a de Euclides, mas alguma outra coisa, na qual os primeiros quatro axi

postulado das paralelas a partir dos outros axiomas. Essa prova excluiria a possibilida geometria de Bolyai. Mas aí estava ela, essa nova geometria.

Às vezes um desenvolvimento matemático "está no ar" – por razões malcompreendidas, a comunidade está pronta para certos progressos que estão por estes aparecem de diversas fontes ao mesmo tempo. Exatamente enquanto Bolyai con sua geometria não euclidiana na Áustria-Hungria, Nikolai Lobachevskii[b] fazia o mesr Rússia. E o grande Carl Friedrich Gauss, velho amigo de Bolyai pai, havia formulado n das mesmas ideias num trabalho que ainda não fora impresso. (Ao ser informado do de Bolyai, Gauss respondeu, de forma um tanto descortês: "Elogiá-lo equivaleria a elo mim mesmo."[2])

Descrever a chamada geometria hiperbólica de Bolyai, Lobachevskii e Gauss exigir pouco mais de espaço do que aquele de que dispomos. No entanto, como observou Berr Riemann algumas décadas depois, existe uma geometria não euclidiana mais simple não é absolutamente um novo Universo maluco: a geometria da esfera.

Revisitemos nossos quatro primeiros axiomas:

- Dois Pontos distintos determinam uma única Reta.
- Qualquer segmento de Reta pode ser estendido para um segmento de Reta de qua comprimento desejado.
- Para todo segmento de Reta R há um Círculo que tem R como raio.
- Todos os Ângulos Retos são congruentes entre si.

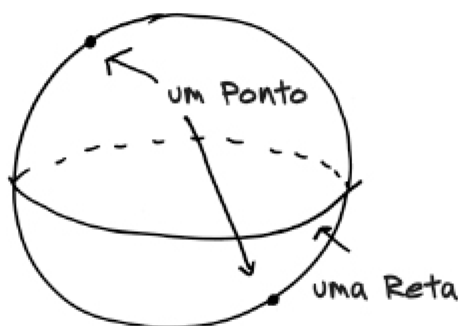
Você pode notar que fiz uma pequena modificação tipográfica, deixando em maiúsculas as iniciais dos termos geométricos *ponto*, *reta*, *círculo* e *ângulo reto*. Não fi para dar aos axiomas uma aparência de estilo antigo na página, mas para enfatizar qu partir de um ponto de vista estritamente lógico, não importa como se chamam "pont "retas" – poderiam se chamar "sapos" e "tangerinas" –, a estrutura da dedução lógica partir do axioma seria exatamente a mesma. É exatamente como o plano de sete pont Gino Fano, em que as "retas" não têm a aparência das retas que aprendemos na escola não faz mal, o importante é que elas agem como retas no que concerne às regras da geometria. Seria *melhor*, de certo modo, chamar pontos de sapos e retas de tangerinas porque o objetivo é nos libertarmos dos preconceitos em relação ao significado real d palavras Ponto e Reta.

Eis o que eles significam na geometria esférica de Riemann. Um Ponto é um *p* pontos na esfera que são *antípodas*, ou diametralmente opostos, um do outro. Uma I um "círculo máximo" – ou seja, um círculo sobre a superfície da esfera, e um segmer Reta é um segmento desse círculo. Um Círculo é um círculo, agora autorizado a ter qua tamanho.

Com essas definições, os quatro primeiros teoremas de Euclides são verdadeiros! I dois pontos quaisquer – isto é, dois *pares* quaisquer de pontos antípodas sobre a esf existe uma Reta – isto é, um círculo máximo – que os une.[c] E mais (embora não seja u

Você poderia reclamar do segundo axioma. Como podemos dizer que um segmer Reta pode ser estendido para *qualquer* comprimento, se ele nunca pode ser mais com que a Reta em si, que é a circunferência da esfera? Essa é uma objeção razoável, mas se a uma questão de interpretação. Riemann interpretou o axioma entendendo que retas *ilimitadas*, e não que tinham extensão infinita. Essas duas noções são sutilmente dist As Retas de Riemann, que são círculos, têm comprimento finito, mas são ilimita possível percorrê-las para sempre, sem parar.

Mas o quinto axioma é outra história. Suponha que tenhamos um ponto P e uma F não contendo P. Há exatamente uma Reta passando por P que seja paralela a R? Nã uma razão muito simples: em geometria esférica, *não há essas coisas* chamadas retas para Quaisquer dois grandes círculos numa esfera precisam estar em interseção.




Prova de um só parágrafo: qualquer círculo máximo C corta a superfície da esfe duas partes iguais, tendo ambas a mesma área. Chamemos essa área de A. Agora sup outro círculo máximo, C', que seja paralelo a C. Como ele não intersecta com C, deve totalmente encerrado em um dos lados de C, numa dessas duas semiesferas de área A isso significa que a área englobada por C' é *menor* que A, o que é impossível, pois círculo máximo engloba exatamente A.

Isso derruba o postulado das paralelas de forma espetacular. (Na geometria de Bo situação é exatamente a oposta: há retas paralelas demais, não de menos; na realida *infinitas* retas passando por P que são paralelas a R. Como você pode imaginar geometria é um pouco mais difícil de visualizar.)

Se essa estranha condição, em que duas retas nunca são paralelas, soa familiar é p já estivemos aqui. Esse é exatamente o mesmo fenômeno que vimos no plano projetiv Brunelleschi e seus colegas pintores usaram para desenvolver a teoria da perspectiva também, todo par de retas se encontra. E isso não é coincidência – pode-se provar geometria de Riemann de Pontos e Retas sobre a esfera é a *mesma* que a do plano proj

Quando interpretados como enunciados acerca de Pontos e Retas sobre a esfe primeiros quatro axiomas são verdadeiros, mas o quinto, não. Se o quinto axioma fosse consequência lógica dos quatro primeiros, então a existência da esfera apresentaria contradição – o quinto axioma seria ao mesmo tempo verdadeiro (em virtude da ve dos primeiros quatro) e falso (em virtude daquilo que sabemos sobre esferas). Pela velha *reductio ad absurdum*, isso significa que esferas não existem. Mas esferas exi Então, o quinto axioma não pode ser provado a partir dos quatro primeiros, CQD.

Isso parece muito trabalho só para tirar uma mancha do piso. Mas a motivaçãc provar enunciados desse tipo não é apenas atribuir atenção obsessiva à estética (embc não possa negar que esses sentimentos desempenhem algum papel). Aí está: uma ve você entende que os quatro primeiros axiomas se aplicam a muitas geometrias difer então, qualquer teorema de Euclides comprovado usando-se apenas esses quatro axi deve ser verdadeiro, e não só na geometria de Euclides, mas em *todas* as geometrias eı os axiomas valem. Essa é uma espécie de multiplicador de forças matemático: a par uma prova, você obtém muitos teoremas.

Esses teoremas não tratam apenas de geometrias abstratas inventadas para provaı ideia. Depois de Einstein, nós compreendemos que a geometria não euclidiana não é s jogo – goste-se dela ou não, este é o aspecto real do espaço-tempo.

Essa história está presente repetidas vezes em matemática: nós desenvolvemos um m que funciona para um problema. Se o método é *bom*, se ele realmente contém uma nova, é típico descobrirmos que a mesma prova funciona em muitos contextos dist que podem ser diferentes do original como uma esfera é diferente de um plano, ou mais. Nesse momento, a jovem matemática italiana Olivia Caramello está fazend alvoroço ao afirmar que teorias que governam muitos campos diferentes da maten estão intimamente relacionadas sob a superfície – se você gosta de termos técnico "classificadas pelos mesmos topos de Grothendieck"; e que, como resultado, teoı provados em um campo da matemática podem ser transportados livremente para teoı em outra área, que em aparência seria totalmente diversa. É cedo demais para di: Caramello realmente "criou um estranho Universo novo", como fez Bolyai, mas o tra dela está bem de acordo com a longa tradição da matemática da qual Bolyai fez parte.

Essa tradição é chamada "formalismo". Era a ela que G.H. Hardy se referia ao com de forma admirável, que os matemáticos do século XIX afinal haviam começadc perguntar como coisas do tipo

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

deveriam ser *definidas*, em vez de indagar o que *eram*. Desse modo, eles evitava "perplexidades desnecessárias" que haviam perseguido os matemáticos de épocas anter Na versão mais pura dessa visão, a matemática torna-se uma espécie de jogo travadc símbolos e palavras. Um enunciado é um teorema precisamente se for consequênc axiomas mediante passos lógicos. Mas aquilo a que axiomas e teoremas se referem, *significam*, está à mão de qualquer um. O que é um Ponto, uma Reta, um sapo ou tangerina? Pode ser qualquer coisa que se comporte da maneira que os axiomas exigeı significado que devemos escolher é aquele que seja adequado às nossas atuais necessic Uma geometria puramente formal é uma geometria que, em princípio, pode ser feit: jamais se ter visto ou imaginado um ponto ou uma reta; é uma geometria na qual é irrele o aspecto que pontos e retas, entendidos da maneira usual, realmente têm.

Hardy decerto teria reconhecido a angústia de Condorcet como perplexidade dc mais desnecessário. Teria aconselhado Condorcet a não perguntar quem era realme

nós deveríamos *definir* como a escolha do público. Essa abordagem formalista da demo
é mais ou menos geral no mundo livre de hoje. Na disputada eleição presidencial de
na Flórida, milhares de eleitores do condado de Palm Beach que acreditavam estar vo
em Al Gore na verdade registraram seus votos para o candidato paleoconservador do P
Reformista, Pat Buchanan, graças à confusamente designada "urna borboleta". Se
tivesse recebido esses votos, ele venceria no estado e chegaria à Presidência.

Mas Gore não recebeu esses votos e nunca batalhou seriamente por eles. Nosso si
eleitoral é formalista. O que conta é a marca feita na urna, não a característica, na me
eleitor, que devemos presumir que essa marca indique. Condorcet teria se importad
a intenção do eleitor; nós, pelo menos oficialmente, não nos importamos. Condorce
se importado também com os moradores da Flórida que votaram em Ralph Nader. 
mindo, como parece seguro presumir, que a maioria deles preferia Gore a Bush, vem
Gore é o candidato que o axioma de Condorcet declara vitorioso: a maioria preferia
Bush, e uma maioria ainda maior preferia ele a Nader. Mas essas preferências nã
relevantes para o sistema que temos. Nós definimos a vontade pública como a marc
aparece com mais frequência em pedacinhos de papel coletados na urna de votação.

Mesmo esse número, claro, está aberto a discussão. Como contamos urnas perfu
ou danificadas? O que fazer com votos despachados das bases militares de além-
respeito dos quais não se sabia com certeza se haviam sido enviados antes ou no 
eleição? E em que medida os condados da Flórida deveriam recontar as urnas na ten
de obter a posição mais precisa possível dos votos reais?

Foi essa última pergunta que foi parar na Suprema Corte, onde o assunto afin
decidido. A equipe de Gore havia pedido uma recontagem em condados selecionad
Suprema Corte da Flórida concordara. Mas a Suprema Corte dos Estados Unidos diss
[3] fixando o total que dava a Bush uma vantagem de 537 votos e garantindo-lhe a el
Novas contagens provavelmente teriam resultados numa determinação numérica
acurada dos votos, mas esta, disse a corte, não era a meta primordial de uma el
Recontar alguns condados, e não outros, seria injusto com os eleitores cujas urna
fossem revistas, disse a corte. Não cabe ao estado contar os votos o mais acurada
possível – saber o que efetivamente aconteceu –, mas obedecer ao protocolo formal q
diz, nos termos de Hardy, quem deve ser definido como vencedor.

De modo mais genérico, o formalismo da lei manifesta-se como adesão ao procedi
e às palavras dos estatutos, mesmo quando – ou especialmente quando – se voltam 
o que prescreve o senso comum. O juiz Antonin Scalia, o mais feroz defensor do forma
legal, não tem meias palavras: "Vida longa ao formalismo. É isso que torna o govern
governo de leis, e não de homens."[4]

Na visão de Scalia, quando os juízes tentam compreender o que a lei pretende
espírito –, eles são inevitavelmente iludidos pelos seus próprios desejos e preconcei
melhor se ater às palavras da Constituição e aos estatutos, tratando-os como axio
partir dos quais podem derivar julgamentos mediante algo como a dedução lógica.

Em questões de justiça criminal, Scalia é igualmente devoto do formalismo: a ve
por definição, é qualquer coisa que seja determinada por um julgamento conduzi

que formulou no caso de 2009, *In Re Troy Anthony Davis*, em que argumentava qu assassino condenado não deveria ter direito a uma nova audiência para análise de evidê apesar do fato de sete das nove testemunhas contra ele terem negado o testemunho ant "Esta corte *nunca* sustentou que a Constituição proíbe a execução de um réu conde que teve direito a um julgamento pleno e justo, mas é posteriormente capaz de conv uma corte *habeas* de que é 'realmente' inocente." (O grifo em "nunca" e as aspa "realmente" são de Scalia.)

No que concerne à corte, diz Scalia, o que importa é o veredito ao qual o júri ch Davis era assassino, tivesse ou não matado alguém.

O presidente da Suprema Corte, John Roberts, não é, como Scalia, um defensor ferv do formalismo, mas tem ampla simpatia pela filosofia de Scalia. Na audiência de confirm em 2005, descreveu sua tarefa comparando-a ao beisebol:

> Juízes de todas as instâncias são servos da lei, e não o contrário. Juízes são como árbitros de beisebol. Os árbit fazem as regras, eles as aplicam. O papel de um árbitro e de um juiz é crítico. Eles asseguram que todo mund conforme as regras. Mas é um papel limitado. Ninguém jamais foi a um jogo para ver o árbitro.

Roberts, conscientemente ou não, ecoava o que falara Bill Klem, o "Velho Árbitro juiz da liga nacional de beisebol durante quase quarenta anos: "O jogo com a melhor at de um árbitro é aquele em que os torcedores não conseguem se lembrar de quem apit

Mas o papel do árbitro não é tão limitado quanto Roberts e Klem querem faze porque o beisebol é um esporte formalista. Para ver isso, basta olhar o jogo 1 do Campe da Liga Americana de 1996, no qual o Baltimore Orioles enfrentou o New York Yanke Bronx. O Baltimore liderava no oitavo *inning*, quando o *shortstop* dos Yankees, Derek lançou uma bola longa para o *reliever* do Baltimore, Armando Benitez, bem rebatida, p viável para o *center fielder* Tony Tarasco, que se colocou sob a bola preparando-se agarrá-la. Foi então que o torcedor dos Yankees Jeffrey Maier, de doze anos, senta primeira fila, debruçou-se sobre a cerca e puxou a bola para as arquibancadas.

Jeter sabia que aquilo não era um *home run*.[e6] Tarasco e Benitez sabiam que não e *home run*. Cinquenta e seis mil torcedores dos Yankees sabiam que não era um *hom* A única pessoa no Yankee Stadium que não viu Maier debruçar-se sobre a cerca era a que importava, o árbitro Rich Garcia. Ele determinou que a bola era um *home run*. Jete tentou corrigir a chamada do árbitro, nem mesmo se recusou a correr em volta das b executar sua corrida de empate. Ninguém teria esperado isso dele, porque o beisebol esporte formalista. Uma coisa *é* aquilo que o árbitro diz que ela é, e ponto final. O palavras de Klem, naquela que deve ser a assertiva mais direta acerca de uma p ontológica já feita por um profissional do esporte: "Não é nada até eu fazer a chamad

Isso está mudando – só um pouquinho. Desde 2008, os árbitros têm permissão consultar o vídeo quando não estão seguros do que ocorreu no campo. Assim, aume o grau de precisão das chamadas, porém, muitos fãs de longa data do beisebol senten de algum modo, isso é algo estranho ao espírito do esporte. Eu sou um deles. Apost John Roberts também é.

Nem todo mundo compartilha a opinião de Scalia sobre a lei (note que a opinião d

como “cruel e inusitado”, deixam uma quantidade significativa de espaço para interpre Se até mesmo o grande Euclides deixou alguma ambiguidade em seus axiomas, podemos esperar algo diferente dos insurretos? Os realistas em relação à lei, como Ri Posner, juiz e professor da Universidade de Chicago, argumentam que a jurisprudên Suprema Corte *nunca* é o exercício da legislação formal que Scalia diz ser:

> A maioria dos casos que a Suprema Corte concorda em decidir é como cara ou coroa, no sentido de que não ser decididos pelo raciocínio legal convencional, com sua pesada dependência da linguagem constitucional e est e das decisões anteriores. Se pudessem ser decididos por aqueles métodos essencialmente semânticos, seriam res sem controvérsias, na Suprema Corte do estado ou na Corte Federal de Apelações, e jamais seriam revistos pela S Corte.[7]

Segundo essa visão, as questões difíceis da lei, aquelas que percorrem todo o can até chegar à Suprema Corte, ficam indeterminadas nos axiomas. Os juízes supremos portanto, na mesma posição que Pascal quando descobriu que não podia chega raciocínio a nenhuma conclusão sobre a existência de Deus. Contudo, como escreveu P não temos escolha a não ser jogar o jogo. A corte precisa decidir por meio de racio legal, convencional ou não. Às vezes ela toma o caminho de Pascal: se a razão não deter o julgamento, faça o julgamento que parece ter as melhores consequências. Seguindo P esse é o caminho que os juízes afinal adotaram em Bush vs. Gore, com Scalia a bor decisão a que chegaram, diz Posner, não era efetivamente respaldada pela Constituiç por um precedente judicial. Foi uma decisão tomada de modo pragmático, com o ob de eliminar a possibilidade de muitos outros meses de caos eleitoral.

## O fantasma da contradição

O formalismo tem uma elegância austera. Ele é atraente para pessoas como G.H. H Antonin Scalia e eu, que saboreiam essa sensação de uma bela teoria rígida, forter vedada a contradições. Mas não é fácil ater-se, de modo consistente, a princípios como tampouco é claro se eles chegam a ser sensatos. Mesmo o juiz Scalia tem reconhecid por outra, que quando as palavras literais da lei parecem indicar um julgamento absur palavras literais devem ser abandonadas em favor de um palpite razoável acerca do Congresso pretendia.[8] Da mesma forma, nenhum cientista realmente quer estar pr regras de significância, não importa quais princípios alegue ter. Quando você realiz experimentos, um deles testando um tratamento clínico que em tese parece promissor, testando se o salmão morto responde emocionalmente a fotos românticas, e amb experimentos dão certo com valores-*p* de 0,03, você não quer tratar as duas hipótes mesmo modo. Você quer abordar as conclusões absurdas com uma dose extra de cetic e as regras que se danem.

O maior defensor do formalismo na matemática foi David Hilbert, o matemático al cuja lista de 23 problemas, apresentada em Paris, no Congresso Internacional de Maten de 1900, determinou o curso de grande parte da matemática no século XX. Hilbert reverenciado que qualquer trabalho que apenas tangencie um de seus problemas ad

da cultura germânica em Columbus, Ohio, que me disse que a predileção de Hilbei calçar sandálias com meias é o motivo de esta moda ainda ser francamente popular en matemáticos hoje. Não pude encontrar evidência de que isso seja verdade, mas me co acreditar, e isso dá uma impressão correta do tamanho da sombra de Hilbert.

Muitos dos problemas de Hilbert caíram depressa. Outros, como o de númer referente ao empacotamento mais denso possível de esferas, só foram resolvidos rec mente, como vimos no Capítulo 12. Alguns ainda estão em aberto e são fervorosar estudados. A resolução do problema número 8, a hipótese de Riemann, vai receber o pı de US$ 1 milhão, da Fundação Clay.

Pelo menos uma vez o grande Hilbert se enganou: no problema 10, ele pedia um algo que pegasse qualquer questão e dissesse se ela tinha uma solução na qual todas as var assumissem valores inteiros. Numa série de artigos nas décadas de 1960 e 1970, M Davis, Yuri Matijasevic, Hilary Putnam e Julia Robinson mostraram que esse algoritm existia. (Teóricos dos números, por toda parte, deram um suspiro de alívio – seria um desanimador se houvesse transpirado que um algoritmo formal poderia resolver os pı mas sobre os quais passamos anos debruçados.)

O problema 2 de Hilbert era diferente dos outros, porque não se tratava tanto de questão matemática, mas da matemática em si. Ele começava com um altissonante en da abordagem formalista da matemática.

> Quando estamos envolvidos na investigação dos alicerces de uma ciência, precisamos estabelecer um sistema de a que contenha uma descrição exata e completa das relações subsistentes entre as ideias elementares dessa ciêr axiomas assim estabelecidos são ao mesmo tempo as definições dessas ideias elementares; e nenhuma afirma interior do domínio da ciência cujos alicerces estamos testando, é considerada correta, a menos que possa ser d desses axiomas por meio de um número finito de passos lógicos.[9]

Na época da conferência em Paris, Hilbert já havia revisitado os axiomas de Eucl os reescrevera para remover qualquer vestígio de ambiguidade. Ao mesmo tempo, ex rigorosamente qualquer apelo à intuição geométrica. Sua versão dos axiomas conti fazer sentido se substituirmos "ponto" e "reta" por "sapo" e "tangerina". O próprio H fez um comentário famoso: "É preciso que se possa dizer, a qualquer momento, em v pontos, retas e planos, mesas, cadeiras e canecas de cerveja."[10] Um dos primeiros fãs da geometria de Hilbert foi o jovem Abraham Wald, que, ainda estudante, em Viena, der trara como alguns dos axiomas de Hilbert podiam ser derivados de outros, e portanto dispensáveis.[f]

Hilbert não se contentou em parar na geometria. Seu sonho era criar uma maten puramente formal, na qual dizer que um enunciado era verdadeiro equivalia precisar a dizer que ele obedecia às regras estabelecidas no início do jogo, nem mais, nem m Era uma matemática da qual Antonin Scalia teria gostado. Os axiomas que Hilbert em mente para a aritmética, formulados pela primeira vez pelo matemático italiano Giu Peano, dificilmente parecem o tipo de coisa sobre a qual possa haver qualquer quest controvérsia interessante. Eles dizem coisas do tipo "Zero é um número", "Se $x$ é igua $y$ é igual a $z$, então $x$ é igual a $z$" e "Se o número imediatamente seguinte a $x$ é o mesm o número imediatamente seguinte a $y$, então $x$ e $y$ são o mesmo número." Essas são ver

O que é notável nesses axiomas de Peano é que, a partir desse começo absolutar simples, é possível gerar muita matemática. Os axiomas em si parecem referir-se ape números inteiros, mas o próprio Peano mostrou que, partindo dos seus axiomas e pı guindo puramente por definição e dedução lógica, podem-se definir os números raci e provar suas propriedades básicas.[g] A matemática do século XIX havia sido assolad confusão e crises quando se descobriu que definições amplamente aceitas em aná geometria eram falhas do ponto de vista lógico. Hilbert via o formalismo como um m começar de novo a partir do zero, construído sobre uma fundação tão básica a ponto totalmente incontroversa.

Mas havia um espectro assombrando o programa de Hilbert: o espectro da contra Eis o cenário do pesadelo. A comunidade matemática, trabalhando conjuntamente uníssono, reconstrói todo o aparato da teoria dos números, da geometria e do cá começando a partir dos axiomas que constituem o leito rochoso e erguendo novos teor tijolo por tijolo, cada camada cimentada à anterior pelas regras da dedução. E aí, un dia, um matemático de Amsterdam prova que certa afirmação matemática é verda enquanto outro matemático em Kyoto prova que ela não é.

E agora? Começando por afirmativas sobre as quais não há possibilidade de dı chegou-se a uma contradição. *Reductio ad absurdum*. Você conclui que os axiomas est errados? Ou que há algo de errado com a estrutura da dedução lógica em si? E o que faz com as décadas de trabalho baseadas nesses axiomas?[h]

Daí o segundo problema entre os apresentados por Hilbert aos matemáticos reu em Paris:

> Mas acima de tudo desejo designar a seguinte como a mais importante entre as questões que podem ser forr com respeito aos axiomas: provar que eles não são contraditórios, isto é, que um número definido de passos baseados neles jamais pode levar a resultados contraditórios.

É tentador afirmar simplesmente que esse resultado terrível não pode acontecer. ( poderia? Os axiomas são obviamente verdadeiros. Mas não era menos óbvio para os g antigos que uma grandeza geométrica deve ser uma razão entre dois números inteiro assim que funcionava sua ideia de medição, até que todo o arcabouço ficou abalad teorema de Pitágoras e a teimosamente irracional raiz quadrada de 2. A matemática péssimo hábito de mostrar que, às vezes, aquilo que é uma verdade óbvia está absolutar errado.

Considere o caso de Gottlob Frege, o lógico alemão que, como Hilbert, empenha em firmar as estacas lógicas subterrâneas da matemática. O foco de Frege não era a dos números, mas a teoria dos conjuntos. Também ele começou com uma sequên axiomas que pareciam tão óbvios que mal precisavam ser enunciados. Na teoria dos juntos de Frege, um conjunto nada mais era que uma coleção de objetos, chamados ele tos. Geralmente usamos chaves { } para representar os conjuntos cujos elementos estão inseridos; então, {1,2,porco} é o conjunto cujos elementos são o número 1, o número 2 porco.

Quando alguns desses elementos desfrutam certa propriedade, e outros não, h

amarelos formam um conjunto, o conjunto de porcos amarelos. Difícil achar aqui al coisa que possa criar dificuldade. Mas essas definições são realmente genéricas. Um con pode ser uma coleção de porcos, ou de números reais, ou de ideias, ou de universos pos ou de outros conjuntos. E é este último que causa todos os problemas. Será que exis conjunto de todos os conjuntos? Claro que sim. Um conjunto de todos os conjuntos infi Por que não? Na verdade, ambos esses conjuntos têm uma propriedade curiosa: *el elementos de si mesmos*. O conjunto de conjuntos infinitos, por exemplo, decerto é ele m um conjunto infinito. Seus elementos incluem conjuntos como

{os inteiros}
{os inteiros e também um porco}
{os inteiros e também a Torre Eiffel}

e assim por diante. Claro que isso não tem fim.

Poderíamos chamar esse conjunto de ourobórico, em referência à cobra mític faminta que devora a própria cauda e consome a si mesma. Então, o conjunto de conj infinitos é ourobórico, mas {1,2,porco} não é, porque nenhum de seus elementos é o pr conjunto {1,2,porco}; todos os seus elementos são números ou animais de fazenda, ma conjuntos.

Agora vem a pegadinha. Seja não o conjunto de todos os conjuntos não ourobó Não parece uma coisa esquisita para se pensar, mas se a definição de Frege permite is mundo dos conjuntos, então nós também temos de permitir.

Mas e aí? Não é ourobórico ou não? Quer dizer, não é um elemento de não? Por defi se não é ourobórico, então não pode estar em não, que consiste apenas em conjunto ourobóricos. Mas dizer que não não é um elemento de não é precisamente dizer que não ourobórico; ele não contém a si mesmo.

Espere aí, se não é não ourobórico, então ele *é* um elemento de não, que é o conjur todos os conjuntos não ourobóricos. Agora, no fim das contas, não é um elemento d o que vale dizer que não é ourobórico.

Se não é ourobórico, então ele não é; e se não é, é.

Esse foi, mais ou menos, o conteúdo de uma carta que o jovem Bertrand Russell esc a Frege em junho de 1902. Russell havia conhecido Peano em Paris, no Congresso Int cional de Matemática – não se sabe se ele assistiu à conferência de Hilbert, mas com c estava a par do programa de reduzir toda a matemática a uma sequência cristali deduções a partir de axiomas básicos.[i] A carta de Russell começava como a missiva c admirador para um lógico mais velho:

> Vejo-me em total acordo com o senhor em todos os pontos principais, especialmente na sua rejeição a q elemento psicológico em lógica e no valor que o senhor atribui a uma notação conceitual para as funda matemática e da lógica formal, que, incidentalmente, dificilmente podem ser distinguidas.

Mas então ele diz: “Encontrei uma dificuldade em um único ponto.” E Russell exp dilema do não, agora conhecido como paradoxo de Russell.

Russell encerrava a carta expressando pesar por Frege não ter publicado ainda o seg volume de *Fundamentos*. Na verdade, o livro estava pronto e já no prelo quando recebeu a carta de Russell. Apesar do tom respeitoso ("Encontrei uma dificuldade", "Oi, acabei de ferrar com o trabalho da sua vida"), Frege entendeu imediatamente o paradoxo de Russell significava para sua versão da teoria dos conjuntos. Era tarde d para mudar o livro, mas ele logo redigiu um pós-escrito registrando o devastador lar de Russell. A explicação de Frege talvez seja a sentença mais triste já escrita num técnico de matemática: "Um cientista dificilmente pode experimentar algo mais indes do que, tão logo tenha se completado seu trabalho, ver suas fundações cederem."[j]

Hilbert e os outros formalistas não queriam deixar aberta a possibilidade de contradição embutida como uma bomba-relógio nos axiomas. Ele queria um arcal matemático no qual a consistência estivesse garantida. Não que Hilbert realmente per ser *provável* haver uma contradição oculta na aritmética. Como a maioria dos matemá e até como a maioria das pessoas normais, ele acreditava que as regras-padrão da aritn eram afirmações verdadeiras sobre os números inteiros, de modo que não podiam d se contradizer. Mas isso não era satisfatório, baseava-se na pressuposição de que o con dos números inteiros *realmente existia*.

Esse era um ponto embaraçoso para muitos. Georg Cantor, algumas décadas antes primeira vez colocara a noção de infinito sobre um tipo de alicerce matemático firme seu trabalho não fora digerido com facilidade nem fora universalmente aceito, e hav grupo substancial de matemáticos que sentia que qualquer prova que se baseasse na tência de conjuntos infinitos deveria ser considerada suspeita. Que houvesse algo co número 7, isso todos estavam dispostos a aceitar. Que houvesse algo como o conjur *todos* os números, esse era um assunto a ser debatido.

Hilbert sabia muito bem o que Russell fizera com Frege e estava cônscio dos pe apresentados por um raciocínio displicente sobre conjuntos infinitos. "Um leitor cuida escreveu ele em 1926, "descobrirá que a bibliografia da matemática é farta em inanida absurdos que tiveram origem no infinito."[11] (O tom não estaria aqui deslocado em un mais suaves discordâncias em relação a Antonin Scalia.) Hilbert buscava uma prova *fin* de consistência, uma prova que não fizesse referência a nenhum conjunto infinito, na uma mente racional não pudesse deixar de acreditar.

Mas Hilbert acabaria se decepcionando. Em 1931, Kurt Gödel provou, em seu fa segundo teorema da incompletude, que não podia haver prova finitária da consistên aritmética. Ele matara o programa de Hilbert de um só golpe.

Será que você deveria se preocupar com a possibilidade de todo o edifício maten desabar amanhã à tarde? Em relação ao vale a pena, eu não estou preocupado. Eu acr *sim*, em conjuntos infinitos e considero as provas de consistência que usam conj infinitos convincentes o bastante para me deixar dormir à noite.

A maioria dos matemáticos é como eu, mas há alguns dissidentes. Em 2011, Ec Nelson, lógico que leciona em Princeton, fez circular uma prova da *inconsistênc* aritmética. (Felizmente para nós, Terry Tao encontrou em poucos dias um erro no argur de Nelson.[12]) Vladimir Voevodsky, ganhador da Medalha Fields e agora no Institu

motivo para se sentir seguro sobre a consistência da aritmética. Ele e um grande g internacional de colaboradores têm sua própria proposta para as novas fundaçõ matemática. Hilbert começara pela geometria, mas logo passara a ver a consistênc aritmética como o problema mais fundamental. O grupo de Voevodsky, em cont argumenta que a geometria é, afinal, a coisa fundamental – e não qualquer geon familiar a Euclides, mas uma geometria de tipo mais moderno, chamada *teoria da homo* Estarão essas fundações imunes ao ceticismo e às contradições? Perguntem-me da vinte anos. Essas coisas levam tempo.

O estilo de matemática de Hilbert sobreviveu à morte de seu programa formalista. M antes do trabalho de Gödel, Hilbert já deixara claro que não pretendia que a maten fosse *criada* de maneira fundamentalmente formalista. Isso seria difícil demais! Mesm a geometria possa ser remodelada como um exercício de manipular cordões de sím sem significado, nenhum ser humano pode gerar ideias geométricas sem desenhar fi sem imaginar figuras, sem pensar nos objetos da geometria como *coisas reais*. Meu a filósofo geralmente acha esse ponto de vista, chamado platonismo, bastante vergon Como pode um hipercubo pentadecadimensional ser algo real? Só posso responde para mim parece tão real quanto, digamos, as montanhas. Afinal, eu posso *defin* hipercubo pentadecadimensional. Você pode fazer o mesmo com uma montanha?

Mas nós somos filhos de Hilbert. Quando tomamos cerveja com os filósofos, no f semana, e eles ficam nos cutucando em relação ao status dos objetos que estudamos nos recolhemos ao nosso reduto formalista, protestando: claro, usamos nossa int geométrica para descobrir o que se passa, mas o modo como afinal *sabemos* que dizemos é verdade é a existência de uma prova formal por trás da figura. Na fa formulação de Philip Davis e Reuben Hersh: "O matemático típico é platônico ao trab durante a semana, mas é formalista aos domingos."[13]

Hilbert não queria destruir o platonismo. Queria tornar o mundo seguro p platonismo, colocando temas como a geometria sobre uma fundação formal tão inab que pudéssemos nos sentir tão moralmente robustos durante a semana quanto no don

## Genialidade é uma coisa que acontece

Eu dei muita importância ao papel de Hilbert, e com justiça, mas há um risco de prestando atenção exagerada aos nomes acima citados, eu acabe passando a impr errada de que a matemática é um empreendimento no qual alguns gênios solitários uma marca de nascença, iluminam o caminho para o resto da humanidade percorrer. I contar a história dessa maneira. Em alguns casos, como o de Srinivasa Ramanujan, a não fica tão distante disso. Ramanujan era um prodígio do sul da Índia.[14] Desde a in produziu ideias matemáticas superoriginais, que ele descrevia como revelações divin deusa Namagiri. Ele trabalhou durante anos em completo isolamento do corpo princi matemática, com acesso somente a alguns poucos livros para familiarizar-se com o e contemporâneo da matéria. Em 1913, quando finalmente fez contato com o mundo

teoremas, muitos dos quais ainda sujeitos a investigação ativa. (A deusa forneceu a R nujan enunciados de teoremas, mas não as provas; estas são tarefa nossa, dos sucesso: Ramanujan.)

Mas Ramanujan é um caso fora de série, cuja história é repetida por ser tão p característica. Hilbert começou como um aluno muito bom, mas não excepciona maneira nenhuma o jovem matemático mais brilhante de Königsberg – este era Her Minkowski,[15] dois anos mais novo. Minkowski seguiu uma destacada carreira matem mas não foi nenhum Hilbert.

Uma das partes mais dolorosas de lecionar matemática é ver os alunos prejudicado culto da genialidade. Esse culto diz aos estudantes que não vale a pena fazer matemá não ser que você seja o *melhor* na matéria, porque esses poucos especiais são os únicos contribuições importam. Ninguém trata nenhuma outra disciplina dessa maneira! N ouvi nenhum aluno dizer: "Gosto de *Hamlet*, mas realmente não vale a pena fazer liter inglesa… Aquele garoto ali na frente conhece *todas* as peças e começou a ler Shakes quando tinha nove anos!" Atletas não abandonam seu esporte só porque um dos seus co de equipe brilha mais que ele. No entanto, vejo jovens matemáticos promissores larga disciplina todo ano, mesmo que adorem matemática, porque alguém em seu campo de está "à sua frente".

Nós perdemos um monte de estudantes de matemática por causa disso. E perdemo monte de futuros matemáticos. Mas este não é todo o problema. Acho que precisam mais estudantes de matemática que *não* se tornem matemáticos. Mais estudantes de mática que acabem virando médicos, ou professores do ensino médio, ou president empresas, ou senadores. Mas não chegaremos lá enquanto não jogarmos fora o estere de que a matemática só vale a pena para os pequenos gênios.

O culto da genialidade também tende a subvalorizar o trabalho árduo. Quando eu e no começo da carreira, pensava em "trabalho árduo" como uma espécie de insulto vel algo a se dizer sobre um aluno quando não se pode falar honestamente que ele é intelig Mas a capacidade de trabalhar com afinco – de manter a atenção e a energia focalizad problema, de revirá-lo sistematicamente e forçar qualquer coisa que possa parecer rachadura em sua couraça, apesar da ausência de sinais externos de progresso – não e todo mundo. Os psicólogos agora a chamam de "determinação",[16] e é impossível matemática sem ela. É fácil perder de vista a importância do trabalho, porque a inspi matemática, quando afinal chega, pode parecer imediata e sem esforço.

Lembro-me do primeiro teorema que provei. Eu estava na faculdade, fazendo trabalho de fim de curso, completamente emperrado. Certa noite, numa reunião da e editorial da revista literária do campus, eu tomava vinho tinto e participava dispersivar da discussão sobre um conto meio chato, quando de repente algo se remexeu na m cabeça e compreendi ultrapassar o bloqueio. Nada de detalhes, mas isso não tinha im tância. Na minha cabeça, não havia dúvida de que a coisa estava feita.

É dessa forma que a criação matemática muitas vezes se apresenta. Eis o famoso do matemático francês Henri Poincaré sobre uma descoberta matemática que ele fe 1881:

Tendo chegado a Coutances, entramos num ônibus para ir a algum lugar. No momento em que pisei o primeiro a ideia me veio, e nada em meus pensamentos anteriores parecia ter aberto caminho para ela: as transformações tinha usado para definir as funções fuchsianas eram idênticas às de geometria não euclidiana. Não verifiquei possivelmente não tive tempo, pois, ao tomar meu assento no ônibus, continuei uma conversa já iniciada. C tive uma perfeita certeza. Ao voltar para Caen, só para ficar em paz com a consciência, verifiquei o resultad hora de folga.[1]

Mas *na realidade* a coisa não aconteceu no intervalo de um passo, explica Poincaré momento de inspiração é produto de semanas de trabalho, tanto consciente quanto in ciente, que de algum modo preparam a cabeça para fazer a necessária conexão de i Ficar sentado à espera de inspiração leva ao fracasso, não interessa se você é um me prodígio.

Para mim, pode ser difícil argumentar a favor disso, porque eu mesmo fui um meninos-prodígios. Já aos seis anos eu sabia que ia ser matemático. Frequentei cursos acima do meu nível escolar e ganhei um monte de medalhas em competições de matem Estava bem seguro, quando fui para a faculdade, que os competidores que eu conhe Olimpíada de Matemática eram os grandes matemáticos da minha geração. Mas acabo não fui exatamente um deles. Aquele grupo de jovens astros produziu muitos matem excelentes, como Terry Tao, medalhista Fields – campeão em análise harmônica. M maioria dos matemáticos com quem trabalho agora não eram matematletas de pri time aos treze anos – eles desenvolveram suas habilidades e talentos numa escala de t diferente. Será que deveriam ter desistido no ensino médio?

O que se aprende depois de um longo tempo na matemática – e acho que essa li aplica de forma muito mais ampla – é que há *sempre* alguém à sua frente, esteja ele be na sua turma ou não. Os que estão começando olham para aqueles com bons teor aqueles que têm bons teoremas olham para os que têm montes de bons teoremas; pe com montes de bons teoremas olham para os ganhadores da Medalha Fields; os ganha de Medalhas Fields olham para os medalhistas Fields do "círculo interno", e estes se podem olhar para aqueles que já estão mortos. Ninguém nunca olha no espelho "Vamos encarar. Eu sou mais inteligente que Gauss." Mesmo assim, nos últimos cem o esforço conjunto de todos esses "bobões comparados com Gauss" produziu o maior do conhecimento matemático que o mundo já viu.

A matemática, em sua maior parte, é uma empreitada comunal. Cada progress resultado de uma imensa rede de cabeças trabalhando com um propósito comum, m que concedamos honras especiais à pessoa que coloca a última pedra no arco. Mark é bom nisso: "São necessários mil homens para inventar o telégrafo, a máquina a va fonógrafo, o telefone ou qualquer outra coisa importante. O último ganha o crédito esquecemos os outros."[17]

É mais ou menos como no futebol americano. Há momentos, claro, em que um jo assume totalmente o controle do jogo, e esses são momentos que lembramos, celebra relatamos por muito tempo. Mas eles não são o padrão normal do futebol americano, é assim que se ganha a maioria dos jogos. Quando um *quarterback* completa um mag passe para um *touchdown* lançando um *wide receiver* na corrida, você está assistin trabalho em conjunto de muita gente: não só do *quarterback* e do *receiver*, mas de t

se firme e faça o lançamento; a finta de bloqueio do *running back* que fingiu agarrar a e sair correndo com o objetivo de enganar a defesa num momento crítico; e aí, tamb coordenador do ataque, que bolou a jogada, e seus numerosos assistentes; e a equi condicionamento físico, que mantêm os jogadores em forma para correr e lançar… Nin chama todos eles de gênios. Mas são eles que criam as condições nas quais a genial pode acontecer.

Terry Tao escreve:

> A imagem popular do gênio solitário (e possivelmente meio maluco) – que ignora a bibliografia e a sa convencional, e consegue alguma inspiração inexplicável (realçada, talvez, por um generoso traço de sofriment aparecer com alguma empolgante solução de um problema que confundia todos os especialistas – é char romântica, mas também barbaramente inexata, pelo menos no mundo da matemática moderna. Nós temos res e insights espetaculares, profundos e extraordinários nessa matéria, claro, mas são conquistas trabalhosas e cum de anos, décadas e até séculos de trabalho e progresso constantes de muitos bons e grandes matemáticos; o pr de um estágio de compreensão para o seguinte pode ser altamente não trivial, e às vezes bastante inesperado, ma assim se constrói sobre as fundações do trabalho anterior, e não de um novo início a partir do nada. … Na v considero a realidade da pesquisa matemática hoje – na qual o progresso é obtido natural e cumulativament consequência de trabalho árduo, dirigido por intuição, leitura e um pouquinho de sorte – muito mais satisfatc a imagem romântica que eu tinha quando estudante, ou seja, a matemática progredindo basicamente por m inspirações místicas de uma rara espécie de "gênios".[18]

Não é errado dizer que Hilbert era um gênio. Mas é mais correto dizer que o que H conseguiu era genial. A genialidade é uma coisa que acontece, e não uma característi um tipo de pessoa.

## Lógica política

Lógica política não é um sistema formal no sentido que Hilbert e os lógicos matem davam a ela. Todavia, os matemáticos com visão formalista não poderiam deixar c incentivados a isso pelo próprio Hilbert, que, em sua palestra de 1918, "Axiomatic tho advogava que outras ciências adotassem a abordagem axiomática, tão bem-sucedi matemática.

Gödel, por exemplo, cujo teorema excluiu a possibilidade de banir definitivame contradição da aritmética, também se preocupava com a Constituição dos Estados U que estudou ao se preparar para o teste a fim de obter a cidadania americana, em 194 sua opinião, o documento tinha uma contradição que permitia a uma ditadura fa tomar o poder no país de forma perfeitamente constitucional. Os amigos de Gödel, A Einstein e Oskar Morgenstern, imploraram que ele evitasse esse assunto no exame, como se recorda Morgenstern, a conversa acabou mais ou menos assim:

> EXAMINADOR: Então, sr. Gödel, de onde o senhor vem?
> GÖDEL: De onde eu venho? Da Áustria.
> EXAMINADOR: Que tipo de governo vocês têm na Áustria?
> GÖDEL: Era uma República, mas a Constituição era tal que acabou virando uma ditadura.
> EXAMINADOR: Ah! Mas isso é muito ruim. Uma coisa dessas não poderia acontecer neste país.
> GÖDEL: Poderia, sim, e eu posso provar.

Felizmente, o examinador depressa mudou de assunto, e a cidadania de Gödel foi devidamente concedida. Quanto à natureza da contradição[19] que Gödel achou na Constituição americana, parece ter se perdido na história matemática. Talvez tenha si melhor!

O COMPROMISSO DE HILBERT com o princípio e a dedução lógicos muitas vezes o levou, Condorcet, a adotar uma concepção surpreendentemente moderna em assunto matemáticos.[m] Com algum custo político para si mesmo, ele se recusou a assinar, em a Declaração para o Mundo Cultural,[20] que defendia a guerra do kaiser na Europa com longa lista de negativas, cada qual começando com o enunciado "Não é verdade": " verdade que a Alemanha violou a neutralidade da Bélgica", e assim por diante. Muito maiores cientistas alemães, como Felix Klein, Wilhelm Roentgen e Max Planck, assir a declaração. Hilbert disse, de forma bem simples, que era incapaz de verificar con parâmetros de exatidão se as afirmativas em questão de fato não eram verdadeiras.

Um ano depois, quando o corpo docente em Göttingen recusou-se a oferecer uma po para a grande algebrista Emmy Noether, alegando que não se podia pedir aos estuc que aprendessem matemática com uma mulher, Hilbert respondeu: "Não vejo como da candidata seja um argumento contra sua admissão. Nós somos uma universidad uma casa de banhos."

A análise ponderada da política, porém, tem seus limites. Já velho, na década de Hilbert parecia incapaz de captar o que estava acontecendo com seu país natal quan nazistas ali consolidaram seu poder. Seu primeiro aluno de doutorado, Otto Blume visitou Hilbert em Göttingen, em 1938, para comemorar seu 76º aniversário. Blume era cristão, mas vinha de família judia, e por esse motivo foi afastado de seu posto acad em Aachen. (No mesmo ano que Abraham Wald, na Áustria ocupada pela Alemanh partiu para os Estados Unidos.)

Constance Reid, em sua biografia de Hilbert, relata a conversa[21] na festa de anivers

– Que matéria você está lecionando este semestre? – Hilbert indagou.

– Eu não leciono mais – Blumenthal lembrou-lhe delicadamente.

– O que você quer dizer com "Não leciono mais"?

– Não tenho mais permissão para lecionar.

– Mas isso é absolutamente impossível! Não pode ser feito. Ninguém tem o dire demitir um professor, a menos que ele tenha cometido algum crime? Por que voc recorre à justiça?

## O progresso da mente humana

Condorcet também se ateve com firmeza a suas ideias formalistas sobre a política m quando elas não se ajustavam à realidade. A existência dos ciclos de Condorcet signi que qualquer sistema de votação que obedecesse a esse axioma básico, aparente indiscutível – quando a maioria prefere A a B, B não será vencedor –, poderia cair pr

se ao problema dos ciclos, desenvolvendo sistemas de votação cada vez mais intrincad intenção de fugir do problema da inconsistência coletiva. Ele jamais conseguiu. Em escreveu, bastante desesperançoso:

> Geralmente não podemos evitar que nos sejam apresentadas decisões desse tipo, que poderíamos chamar de eq das, exceto exigindo uma grande pluralidade e permitindo que votem apenas em homens muito esclarecidos. … pudermos achar eleitores que sejam suficientemente esclarecidos, devemos evitar a má escolha aceitand candidatos apenas aqueles homens em cuja competência podemos confiar.[22]

Mas o problema não eram os eleitores, era a matemática. Condorcet, compreendemos, desde o início estava condenado ao fracasso. Kenneth Arrow, em su de doutorado, em 1951, provou que mesmo um conjunto de axiomas muito mais frac o de Condorcet, um conjunto de exigências acerca do qual parece tão difícil de du quanto as regras de aritmética de Peano, leva a paradoxos.[n] Este era um trabalho de g elegância, que ajudou Arrow a conquistar o Prêmio Nobel de Economia em 1972 seguramente teria desapontado Condorcet, como o teorema de Gödel desapontou Hi

Ou talvez não – Condorcet era um homem difícil de desapontar. Quando a Revo ganhou velocidade, seu estilo republicano brando logo foi atropelado pelos jacobinos radicais. Primeiro Condorcet foi marginalizado politicamente, depois, foi forçado a e der-se para evitar a guilhotina. Ainda assim, sua crença na inexorabilidade do prog guiado pela razão e pela matemática não o abandonou. Isolado numa casa segura em sabendo que talvez não tivesse muito tempo pela frente, escreveu seu *Esquisse d'un ta historique des progrès de l'esprit humaine*, apresentando sua visão do futuro. Este documento surpreendentemente otimista, descrevendo o mundo do qual seriam erra dos, pela força da ciência, um a um, os erros do monarquismo, o preconceito sexual, a e a velhice. O trecho a seguir é típico:

> Não seria de esperar que a raça humana seja melhorada por novas descobertas nas ciências e nas artes, e consequência inevitável, nos meios de prosperidade individual e geral? Pelo posterior progresso nos princí conduta e na prática moral? E, por fim, pela real melhora das nossas faculdades morais, intelectuais e físicas, que ser resultado da melhora dos instrumentos que ampliam nosso poder e dirigem o exercício dessas faculdade melhora da nossa organização natural em si?

Hoje, o *Esquisse* é mais conhecido indiretamente. O ensaio inspirou Thomas M (que considerava as predições de Condorcet irremediavelmente solares) a escrever seu mais famoso e muito mais soturno relato sobre o futuro da humanidade.

Pouco depois de escrever a passagem citada, em março de 1794 (ou, no novo calen revolucionário, no Germinal do Ano 2), Condorcet foi capturado e preso. Dois dias d foi encontrado morto – alguns dizem que foi suicídio, outros, que ele foi assassinado.

Assim como o estilo da matemática de Hilbert persistiu a despeito da destruição d programa formal por Gödel, a abordagem de Condorcet para a política sobreviveu desaparecimento. Não esperamos mais encontrar sistemas de votação que satisfaça axioma. Mas nós nos comprometemos com a crença mais fundamental de Condorc que uma "matemática social" quantitativa – o que agora chamamos de "ciência soc deve participar na determinação de uma conduta apropriada de governo. Esses seri "instrumentos que aumentam nosso poder e dirigem o exercício das [nossas] faculda

As ideias de Condorcet estão tão minuciosamente entrelaçadas com o jeito moder fazer política que mal podemos vê-la como uma escolha. Mas é uma escolha. E acho a escolha certa.

---

[a] A versão do quinto postulado que escrevi aqui não é o original de Euclides, mas uma versão lógica equi originalmente enunciada por Proclo, no século V EC, e popularizada por John Playfair em 1795. A versão de Eu um pouco mais longa.

[b] O epônimo para a canção "Lobachevsky", de Tom Lehrer, seguramente o maior número musical cômico de t tempos sobre uma publicação matemática.

[c] Não se espera que isso seja imediatamente óbvio, mas não é difícil convencer-se de que é verdade – reco veementemente pegar uma bola de tênis e um pincel hidrográfico e verificar por si mesmo!

[d] Os pintores não desenvolveram, nem necessitavam desenvolver, uma teoria geométrica formal do plano projeti compreendiam como ele se traduzia em pinceladas na tela, o que era suficiente para os seus propósitos.

[e] *Inning*: dois turnos, ou uma entrada, correspondendo a um tempo em que o time se defende e um tempo em ataca; *shortstop*: jogador responsável pela defesa da centroesquerda; *reliever*: arremessador (pitcher) reserva que e decorrer do jogo; *center field*: responsável por defender a posição central do campo; *home run*: rebatida ideal no b quando a bola fica inalcançável, permitindo ao rebatedor dar uma volta inteira (*home run*) e obtendo o máximo de para uma jogada. (N.T.)

[f] Alguns historiadores afirmam que a atual hipermatematização da economia remonta já a essa época, esclarecend hábito de axiomas passara de Hilbert para a economia por intermédio de Wald e outros jovens matemáticos na V 1930, que combinavam um estilo hilbertiano com fortes interesses aplicados: ver *How Economics Became a Mathe Science*, de E. Roy Weintraub, onde esta ideia é plenamente elaborada.

[g] Provavelmente não é coincidência que Peano tenha sido mais um devoto da linguagem artificial construíd princípios racionais. Ele criou sua própria linguagem, *latino sine flexione*, na qual escreveu alguns dos seus tr matemáticos da fase posterior.

[h] O conto de Ted Chiang, escrito em 1991, "Divisão por zero", abarca as consequências psicológicas sofridas matemático suficientemente desafortunado para revelar essa inconsistência.

[i] Se é para sermos precisos, Russell não era formalista, como Hilbert, o qual declarava que os axiomas eram simple cordões de símbolos sem nenhum significado definido. Russell era "logicista", e sua visão era de que os axiomas eram enunciados verdadeiros sobre fatos lógicos. Ambos os grupos compartilhavam um interesse vigoroso em de que enunciados podiam ser deduzidos dos axiomas. O grau da sua preocupação com essa distinção é uma boa me seu possível gosto em cursar uma pós-graduação em filosofia analítica.

[j] "*Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als dass ihm nach Vollendu Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird.*"

[k] Eles realmente fazem isso!

[l] Do ensaio de Poincaré "Criação matemática", leitura altamente recomendável se você se liga em criatividade mat ou em qualquer tipo de criatividade.

[m] Ressalva: Amir Alexander, em *Infinitesimal* (Nova York, FSG, 2014), argumenta que, no século XVII, a posiç formalista, representada pela geometria euclidiana clássica, se aliava às hierarquias rígidas e à ortodoxia jesuítica, er mais intuitiva e menos rigorosa a teoria pré-newtoniana dos infinitesimais se ligava a uma ideologia mais progre democrática.

[n] Um sistema de votação ao qual o teorema de Arrow *não* se aplica é a "votação de aprovação", na qual não é declarar todas suas preferências. Você simplesmente vota em quantas pessoas quiser, na urna, e o candidato que o maior número de votos ganha. A maioria dos matemáticos que conheço considera a votação de aprovação ou suas va algo superior, tanto em votação plural quanto em votação preferencial. O sistema tem sido usado para eleger secretários-gerais das Nações Unidas e representantes da American Mathematical Society, mas ainda não para re tantes no governo.

# Epílogo
# Como estar certo

ENTRE O SEGUNDO e o terceiro anos de faculdade, tive um emprego de verão numa pes em saúde pública. O pesquisador – em um minuto ficará claro por que não estou us seu nome – quis contratar um aluno de graduação em matemática porque desejava quantas pessoas teriam tuberculose em 2050. Meu emprego de verão era esse, desco tal número. O pesquisador me entregou uma grande pasta de artigos sobre tuberc quanto a doença era transmissível em variadas circunstâncias, o curso típico da infec a duração do período de contágio máximo, curvas de sobrevivência e taxas de ren depois da medicação, tudo dividido por idade, raça, sexo e ocorrência de HIV. Era pasta enorme. Papéis aos montes. Pus mãos à obra, fazendo o que estudantes de maten fazem: um modelo de predomínio da tuberculose usando dados que o pesquisador me para avaliar como os índices de infecção em diferentes grupos de população iria modificar e interagir com o decorrer do tempo, década a década, até 2050, ano en terminava a simulação.

O que aprendi foi o seguinte: eu não tinha a menor ideia de quantas pessoas t tuberculose em 2050. Cada um dos estudos empíricos tinha embutida alguma incertez achava-se que a taxa de contágio era de 20%, mas talvez fosse 13%, ou 25%, embora hou bastante certeza de que não era de 60% nem de 0%. Cada uma dessas pequenas ince locais infiltrava-se na simulação, e as incertezas em relação a diferentes parâmetr modelo retroalimentavam-se mutuamente; em 2050, o ruído havia engolido todo o Eu podia fazer a simulação para dar qualquer coisa. Talvez nem houvesse algo tuberculose em 2050, ou talvez a maior parte da população mundial estivesse infectac não tinha nenhum princípio de escolha.

Não era isso que o pesquisador queria ouvir. Não era para isso que ele me pagava. E remunerava para produzir um número, e com paciência repetia a solicitação. Eu sei q incerteza, dizia ele, é assim que funciona a pesquisa médica, entendo isso, basta voc dar *o seu melhor palpite*. Não importava que eu protestasse dizendo que qualquer p seria pior que palpite nenhum. Ele insistia. Era meu patrão, e eu acabei cedendo. Não dúvida de que depois disso ele contou a muita gente que haveria X milhões de pessoa tuberculose em 2050. E aposto que, se alguém perguntasse como sabia disso, ele diri contratou um cara que fizera o cálculo para ele.

## O crítico que conta

Essa história pode dar a impressão de que estou recomendando um jeito covarde d estar errado, isto é, jamais dizer nada, responder a toda pergunta difícil com um d ombros e uma resposta dúbia: *Bom, decerto pode ser assim, mas, por outro lado, veja também pode ser assado.*

Gente assim, que usa de subterfúgios para fugir das perguntas, ou não diz nada, c que pode ser de um jeito ou de outro, não faz nada acontecer. Quando alguém quer denu esse tipo de gente, costuma citar Theodore Roosevelt e seu discurso "Cidadania em República", proferido em Paris, em 1910, depois de terminado seu mandato presidenc

> Não é o crítico que conta. Não é o homem que aponta como o homem forte tropeça ou onde o realizador d poderia tê-las feito melhor. O crédito pertence ao homem que está realmente na arena, cuja face está desfigur poeira, suor e sangue; que luta corajosamente; que erra, que deixa de alcançar por pouco, uma vez e outra mais, não há esforço sem erro ou imperfeição, mas que de fato se empenha em realizar seus feitos; que conhece g entusiasmos, grandes devoções; que se desgasta numa causa digna; que, na melhor das hipóteses, no final co triunfo de uma grande conquista, e que, na pior das hipóteses, se falhar, pelo menos falhará com grande ous modo que seu lugar jamais seria junto com as almas frias e tímidas que não conhecem a vitória nem a derrota.

Essa é a parte que as pessoas sempre citam, mas o discurso todo é muitíssimo interes mais longo e substancial que qualquer declaração que um presidente dos Estados U atual pudesse fazer. Até você pode encontrar temas que debatemos em algum outro p do livro, como quando Roosevelt toca na decrescente utilidade do dinheiro – "A verd que, depois de ter conseguido certa medida de sucesso ou recompensa material tang questão de ter mais torna-se cada vez menos importante em comparação com as c coisas que podem ser feitas na vida" – e na falácia do "Menos como a Suécia" – se uma é boa, mais dessa coisa deve ser ainda melhor, e vice-versa:

> É tão tolo recusar qualquer progresso porque as pessoas que o exigem desejam em algum ponto chegar a ex absurdos quanto seria chegar a esses extremos absurdos simplesmente porque algumas das medidas advogad extremistas seriam sensatas.

Contudo, o tema principal, ao qual Roosevelt retorna ao longo de todo o discurso, a sobrevivência da civilização depende do triunfo do arrojado, do realista e do viril c o brando, o intelectual e o infértil.[a] Ele falava na Sorbonne, o templo da Academia fra o mesmo lugar em que David Hilbert apresentara sua lista de 23 problemas apenas dez antes. Uma estátua de Blaise Pascal o observava da galeria. Hilbert havia instado os máticos na sua plateia e dava mergulhos cada vez mais profundos de abstração para da intuição geométrica e do mundo físico. A meta de Roosevelt era o extremo opost aparência, ele saudava as conquistas dos acadêmicos franceses, mas deixava claro qu aprendizagem nos livros era de importância apenas secundária na produção da gra nacional.

> Falo em uma grande universidade que representa a fina flor do mais elevado desenvolvimento intelectual; prest as homenagens ao intelecto a ao treinamento especializado e elaborado do intelecto; todavia, sei que terei a ap de todos vós aqui presentes quando acrescentar que o mais importante ainda são os lugares-comuns, as quali virtudes do dia a dia.

No entanto, quando Roosevelt diz "O filósofo de gabinete, o indivíduo refinado e que da sua biblioteca diz como os homens devem ser governados em condições ideai

tempo na biblioteca fazendo exatamente isso, e que contribuiu mais para o Estado fr
que a maioria dos homens práticos do seu tempo. E quando Roosevelt rosnava para as
frias e tímidas que ficam nas margens, em segundo plano, atrás dos guerreiros, v
Abraham Wald, que, pelo que sei, passou a vida toda sem erguer uma arma com ó
mesmo assim desempenhou importante papel no esforço de guerra americano, precisa
por aconselhar os realizadores de ações como realizá-las melhor. Ele não era desfig
pela poeira, nem pelo suor, nem pelo sangue, mas estava *certo*. Era um crítico que co

## Pois isso é ação

Contra Roosevelt, eu vou de John Ashbery, cujo poema "Soonest mended"[2] é a maior s
que conheço de como incerteza e revelação podem se misturar sem se dissolver na
humana. O poema é um retrato mais complexo e acurado da empreitada da vida
homem embrutecido de Roosevelt, ferido e alquebrado, mas sem jamais duvidar d
rumo. A visão tragicômica que Ashbery tem da cidadania poderia ser uma resp
"Cidadania em uma República" de Roosevelt:

Está vendo, ambos estávamos certos, embora nada
Tenha de algum modo chegado a nada; os avatares
Da nossa conformidade com regras e viver
Em torno de casa fizeram de nós… bem, num sentido, "bons cidadãos",
Escovando os dentes e tudo o mais, aprendendo a aceitar
A caridade dos momentos árduos à medida que são distribuídos,
Pois isso é ação, essa falta de certeza, esse descuidado
Preparar, semeando os grãos retorcidos nos sulcos,
Aprontando-se para esquecer e sempre retornando
Ao atracadouro da partida, naquele dia, há tanto tempo.[b]

Pois isso é ação, essa falta de certeza! Esta é uma sentença que repito com frequênci
mim mesmo, como um mantra. Theodore Roosevelt decerto teria negado que "n
certeza" fosse um tipo de ação. Teria dito que era ficar covardemente em cima do mu
Housemartins – a maior banda pop marxista a pegar numa guitarra – tomaram o p
de Roosevelt em sua canção "Sitting on a fence",[3] de 1986, retrato intimidante d
moderado político insosso:

Sentado num muro está um homem que balança de eleição em eleição.
Sentado num muro está um homem que vê ambos os lados dos dois lados.
Mas o real problema deste homem
É dizer que não pode quando pode.[c]

Mas Roosevelt e os Housemartins estão errados, e Ashbery está certo. Para ele, n
certeza é o movimento de uma pessoa forte, e não de um fraco; em outra parte do p
diz-se que é "uma espécie de ficar sobre o muro/ Erguido no plano de um ideal estéti

E a matemática é parte disso. As pessoas em geral pensam na matemática como o
da certeza e da verdade absoluta. De certo modo elas têm razão. Nós transitamos po

Mas a matemática também é um meio pelo qual podemos raciocinar sobre o in domando-o, quando não o domesticando totalmente. Tem sido assim desde o tem Pascal, que começou ajudando jogadores a entender os caprichos da sorte e acabo culando as chances de aposta na mais cósmica incerteza de todas:[e] A matemática nos c meio de, por princípio, não termos certeza, não simplesmente erguendo os braços e di "hã", mas fazendo uma firme declaração: "Não tenho certeza; é por isso e isso que e tenho certeza; e é mais ou menos este o tanto de que eu não tenho certeza." Ou ainda "Não tenho certeza, e você também não deveria ter."

## Um homem que balança de eleição em eleição

Na nossa era, o paladino da incerteza por princípio é Nate Silver, "jogador de pôque line que virou papa das estatísticas de beisebol, que virou analista político", cuja colu *New York Times* sobre as eleições presidenciais de 2012 chamou mais a atenção do pu para os métodos da teoria da probabilidade do que eles jamais haviam merecido. Pens Silver como uma espécie de Kurt Cobain da probabilidade.[4] Ambos eram dedica práticas culturais que antes se confinavam a um quadro pequeno e autorreferen verdadeiros crédulos (para Silver, predição quantitativa de esportes e política; para Co punk rock). E ambos provaram que, se você abrir sua prática ao público, com um acessível, mas sem comprometer a fonte do material, é possível torná-la maciçar popular.

O que tornava Silver tão bom? Em grande parte, ele estava disposto a falar sobre ince disposto a tratar a incerteza não como sinal de fraqueza, e sim como uma coisa re mundo, algo que pode ser estudado com rigor científico e empregado com provei estamos em setembro de 2012 e você perguntar a um bando de entendidos em po "Quem será eleito presidente em novembro?", um montão deles vai dizer "Obama", bando um pouco menor dirá "Romney". A questão é que essas pessoas estão erradas, p a resposta certa é o tipo de resposta que Silver, quase sozinho na mídia de ampla audi estava disposto a dar: "Qualquer um dos dois pode ganhar, porém Obama tem probabilidade substancialmente maior."

Tipos políticos tradicionais saudaram essa resposta com o mesmo desrespeito que pelo meu patrão da pesquisa sobre tuberculose. Eles queriam uma *resposta*. Não enten que Silver estava lhes dando uma.

Josh Jordan, da *National Review*, escreveu: "Em 30 de setembro, às vésperas dos de Silver deu a Obama 85% de chance e predisse uma contagem no colégio eleitoral de 218. Hoje as margens ficaram mais estreitas – mas Silver ainda dá uma vantagem de 250, o que levou muita gente a se perguntar se ele observou o mesmo movimento na di de Romney nas últimas três semanas que os demais."[5]

Se Silver *tinha* observado o movimento em direção a Romney? Claro que sim. No f setembro ele dava a Romney uma chance de vitória de 15%, e em 22 de outubro deu 3 mais que o dobro. Mas Jordan não notou que Silver havia observado, porque este ú

ainda estimava – corretamente – que Obama tinha mais chance de vencer que Ror
Para repórteres políticos como Jordan, isso significava que a resposta não tinha muda

Ou peguemos Dylan Byers em *Politico*:

> Se por acaso Mitt Romney ganhasse em 6 de novembro, fica difícil ver como as pessoas podem continuar a te predições de alguém que nunca deu a esse candidato chance maior que 41% de ganhar (lá atrás, em 2 de junh uma semana da eleição – lhe dá uma chance em quatro, mesmo que as pesquisas o coloquem praticamente o ombro com o adversário. … Com toda a confiança que Silver põe em suas predições, ele muitas vezes dá a im de ser muito vago.[6]

Se você dá alguma importância à matemática, esse tipo de coisa faz a gente ter vo de tirar a calça pela cabeça. A atitude de Silver não tem nada de vaga, é simples honesti Quando a previsão do tempo diz que há 40% de chance de chover, e chove, você perc na meteorologia? Não, você reconhece que o clima é inerentemente incerto, e que previsão taxativa sobre se vai chover amanhã ou não em geral é a coisa errada a se faz

Óbvio que no fim Obama acabou vencendo, e com uma margem confortável, deix os críticos de Silver com cara de bobo.

A ironia é que, se os críticos quisessem pegar Silver numa predição enganada perderam uma grande chance. Podiam ter lhe perguntado: "Em quantos estados vo errar?" Pelo que eu saiba, nunca alguém fez essa pergunta a Silver, mas é fácil ima como ele teria respondido. Em 26 de outubro, Silver estimou que Obama tinha 69 chance de vencer em New Hampshire. Se você o obrigasse a predizer, naquela mesma e lugar, ele teria dito Obama. Então seria possível dizer que ele estimava que sua chan estar errado em New Hampshire era de 0,31. Lembre-se, o valor esperado não é o valo você espera, mas um meio-termo probabilístico entre resultados possíveis – e nesse ca daria zero resposta errada sobre New Hampshire (um resultado com probabilidade de ou uma resposta errada (um resultado com probabilidade de 0,31), o que nos dá um esperado de:

$$(0{,}69) \times 0 + (0{,}31) \times 1 = 0{,}31$$

pelo método que estabelecemos no Capítulo 11.

Silver tinha mais certeza em relação à Carolina do Norte, dando a Obama apenas de chance de ganhar. Mas isso ainda significa que ele estimava uma probabilidade de de que seu palpite em Romney pudesse estar errado, ou seja, dava a si mesmo outro de resposta errada esperada. Eis uma lista dos estados que em 26 de outubro Silver con rava potencialmente competitivos:[7]

| Estado | Probabilidade de vitória Obama | Respostas erradas esperadas |
|---|---|---|
| Oregon | 99% | 0,01 |
| Novo México | 97% | 0,03 |
| Minnesota | 97% | 0,03 |
| Michigan | 98% | 0,02 |
| Pensilvânia | 94% | 0,06 |
| Wisconsin | 86% | 0,14 |
| Nevada | 78% | 0,22 |
| Ohio | 75% | 0,25 |
| New Hampshire | 69% | 0,31 |
| Iowa | 68% | 0,32 |
| Colorado | 57% | 0,43 |
| Virgínia | 54% | 0,46 |
| Flórida | 35% | 0,35 |
| Carolina do Norte | 19% | 0,19 |
| Missouri | 2% | 0,02 |
| Arizona | 3% | 0,03 |
| Montana | 2% | 0,02 |

Como o valor esperado é aditivo, o melhor palpite de Silver quanto ao número de estados competitivos onde ele havia errado é simplesmente a soma das contribuições cada um desses estados, que perfaz 2,83. Em outras palavras, ele teria dito, se alguém perguntasse: "Em média tenho a probabilidade de ter errado em três estados."

Na verdade ele acertou nos cinquenta.[g]

MESMO O GURU POLÍTICO mais experiente pode ter dificuldade em desferir um ataque a por ter sido mais acurado do que disse que seria. A elucubração que isso incita na m sadia, vá atrás dela! Quando você raciocina corretamente, como Silver fez, descobre q sempre pensa que está certo, mas não acha que está sempre certo. Nas palavras do fil W.O.V. Quine:

> Acreditar numa coisa é acreditar que ela é verdadeira; portanto, uma pessoa razoável acredita que cada uma crenças seja verdadeira; contudo, a experiência lhe ensinou a esperar que algumas de suas crenças, ele não sab acabarão por se revelar falsas. Em suma, uma pessoa razoável acredita que cada uma de suas crenças é verdadei algumas são falsas.[8]

Formalmente, isso é muito semelhante à aparente contradição na opinião do p americano que deslindamos no Capítulo 17. O povo americano acha que cada progra governo merece continuar a receber verbas, mas isso não significa que julguem que *to* programas do governo mereçam continuar a receber verbas.

Silver contornou essas convenções esclerosadas de reportagem política contan público uma história mais real. Em vez de dizer quem iria ganhar, ou quem ti *momentum*, informou quais as chances que ele achava corretas. Em vez de dizer qu votos eleitorais Obama receberia, apresentou uma distribuição de probabilidade: dig

obter 330, e assim por diante. Silver estava sendo incerto, *rigorosamente* incerto, pu mente, e o público aceitou. Eu não teria julgado possível.

Isso é ação, essa falta de certeza!

## Contra a precisão

Uma crítica de Silver pela qual tenho um pouco de simpatia é que é enganoso afirmações do tipo "Hoje Obama tem 73,1% de chances de vencer". O decimal sugere precisão de medida que provavelmente não existe. Ninguém pode dizer que acon alguma coisa significativa se o modelo hoje dá 73,1% e amanhã 73,0%. Essa é uma c da apresentação de Silver, e não seu programa de fato, mas ela tinha muito peso en comentaristas políticos, que sentiam que os leitores estavam sendo forçados a aceitar a porque parecia um número com precisão impressionante.

Não existe essa coisa de precisão demais. Os modelos que usamos para realizar padronizados poderiam dar resultados de provas escolares com várias casas deci Bastaria permitir o cálculo, mas não devemos fazê-lo – os alunos já são suficienter ansiosos com os resultados do jeito que são, sem ter de se preocupar se o colega está frente por um centésimo.

O fetiche da precisão perfeita afeta as eleições, não só no candente período de resul de pesquisas, mas também depois que a eleição já ocorreu. A eleição de 2000 na Fl como você lembra, baseou-se numa diferença de poucas centenas de votos entre Geor Bush e Al Gore, um centésimo de ponto percentual do total de votos. Era de import fundamental, pela nossa lei e nossos costumes, determinar qual dos dois candidatos reivindicar algumas centenas de votos a mais nas urnas. Mas, do ponto de vista da id quem os moradores da Flórida queriam para presidente, isso é absurdo. A impre causada por urnas invalidadas, perdidas e mal contadas é muito maior que a minú disparidade na contagem final. Não sabemos quem teve mais votos na Flórida. A dife entre juízes e matemáticos é que os juízes precisam achar um jeito de fingir que sab enquanto os matemáticos estão livres para dizer a verdade.

O jornalista Charles Seife incluiu em seu livro *Os números (não) mentem* uma cr engraçada e levemente deprimente sobre uma disputa também apertada entre o demo Al Franken e o republicano Norm Coleman para representar Minnesota no Senado a cano. Seria ótimo dizer que Franken assumiu o mandato porque um frio procedir analítico mostrou que exatamente 312 eleitores a mais no estado queriam vê-lo ocupa cadeira. Na realidade, porém, esse número reflete o resultado de uma extensa contenda sobre questões como se uma cédula para Franken com um rabisco sobre o "Povo-Lag devia ou não ser anulada. Quando se chega a esse grau de minúcia na discussão, a qu de quem "realmente" obteve mais votos deixa até de fazer sentido. O sinal perde-se no r

Eu tendo a me alinhar com Seife, argumentando que eleições tão apertadas deveria decididas no cara ou coroa.[h] Alguns resistirão veementemente à ideia de escolher n líderes pelo acaso. Mas essa é de fato a maior vantagem de cara ou coroa! Eleições aper

defeito numa cidadezinha distante, uma cédula de votação mal bolada, fazendo com q judeus idosos votem em Pat Buchanan – qualquer um desses eventos ao acaso pode diferença quando o eleitorado fica encalhado em 50-50. A escolha por cara ou coroa im nos de fingir que as pessoas optaram pelo candidato vencedor numa eleição muito ape Às vezes as pessoas falam e dizem: "Sei lá eu."[10]

Você poderia pensar que eu realmente me ligo em casas decimais. Afinal, o gêmeo s do estereótipo de que matemáticos sempre têm certeza é o estereótipo de que somos se precisos, determinados a computar tudo com a maior quantidade possível de casas deci Não é assim. Nós queremos computar tudo com a máxima quantidade de casas dec *necessárias*. Há um rapaz na China chamado Lu Chao que aprendeu e recitou 67.890 d para pi. Esse é um feito impressionante da memória. Mas é interessante? Não, porq dígitos de pi não são interessantes. Até onde sabemos, servem tanto quanto núr aleatórios. O *próprio pi* é interessante, com certeza. Mas pi não são dígitos, ele é merar especificado por seus dígitos, da mesma maneira que a Torre Eiffel é especificada longitude e latitude de 48,8586°N e 2,2942°L. Você pode adicionar a esses números qu casas decimais quiser, e eles continuarão sem lhe dizer o que faz da Torre Eiffel a Torre

A precisão não é feita só de dígitos. Benjamin Franklin tem um comentário arguto um membro do seu grupo na Filadélfia, Thomas Godfrey:

> Ele sabia de pouca coisa fora do seu jeito de ser, e não era uma companhia agradável; pois, como a maioria dos g matemáticos que conheci, ele esperava precisão universal em tudo que se dizia, e vivia sempre negando ou deta trivialidades, para constante confusão de qualquer conversa.[11]

Isso dói porque é apenas parcialmente injusto. Os matemáticos podem ser uns c quando se trata de amenidades lógicas. Somos daquele tipo de pessoa que acha engraçado quando perguntam "Você quer sopa ou salada com isso?" responder "Sim".

## Isso não computa

Com tudo isso, nem os matemáticos, exceto quando querem se exibir, tentam bancar apenas lógicos. Isso pode ser perigoso! Por exemplo, se você é um pensador purar dedutivo e acredita em dois fatos contraditórios, então você é obrigado a acreditar que *afirmação é falsa*. Veja só como funciona. Suponha que eu acredite simultaneament Paris é a capital da França e que não é. Isso parece não ter nada a ver com os Portland Blazers terem sido campeões da NBA em 1982. Mas agora preste atenção no truque que acontece de Paris ser a capital da França *e* os Trail Blazers terem ganhado o campe da NBA? Não, não acontece, porque eu sei que Paris não é a capital da França.

Se não é verdade que Paris é a capital da França e os Trail Blazers foram campeõ Paris *não é* a capital da França ou os Trail Blazers não foram campeões da NBA. Mas que Paris é a capital da França, o que exclui a primeira possibilidade. Então os Trail B não ganharam o campeonato da NBA em 1982.

Não é difícil verificar que um argumento exatamente do mesmo tipo, mas de cabeça

Isso soa esquisito, mas uma dedução lógica é irrefutável. Solte uma mínima contra em algum lugar de um sistema formal, e a coisa toda vai para o brejo. Filósofos de incli matemática chamam essa fragilidade da lógica formal de *ex falso quodlibet*, ou, entre an "o princípio da explosão". (Lembra-se do que eu disse sobre quanto o pessoal da maten gosta de terminologia ligada à violência?)

*Ex falso quodlibet* é como o capitão James T. Kirk costumava desativar intelig artificiais de caráter ditatorial – alimente-as com um paradoxo, e seus módulos de racic entram em pane e param.[12] Elas simplesmente comentam antes de a luzinha de *pov* apagar: "Isso não computa." Bertrand Russell fez com a teoria dos conjuntos de G Frege o que Kirk fazia com robôs insolentes. Seu único e sorrateiro paradoxo botou t prédio abaixo.

Mas o truque de Kirk não funciona com seres humanos. Nós não raciocinamos maneira, nem aqueles entre nós que têm a matemática como meio de vida. Nós s tolerantes com a contradição – até certo ponto. Como disse F. Scott Fitzgerald: "O te uma inteligência de primeira classe é a habilidade de sustentar na mente duas ideias op ao mesmo tempo e ainda manter a capacidade de funcionar."[13]

Os matemáticos usam essa habilidade como ferramenta básica de pensamento. essencial para a *reductio ad absurdum*, que exige que você tenha em mente uma propo que julga falsa e raciocine como se a julgasse verdadeira: eu suponho que a raiz qua de 2 *seja* um número racional, mesmo que esteja tentando provar que não é... Este sonhar lúcido de um tipo muito sistemático. Podemos fazê-lo sem provocar curto-ci em nós mesmos.

Na verdade, esse é um conselho popular (eu sei porque ouvi do meu orientad doutorado, e presumo que ele tenha ouvido do seu orientador etc.): quando você e trabalhando duro num teorema, deve tentar prová-lo de dia e refutá-lo de noite. (A fre cia precisa dessa alternância não é crucial; diz-se que o hábito do topólogo R.H. Bing dividir cada mês; durante duas semanas ele tentava provar a conjectura de Poincaré outras duas tentava encontrar um contraexemplo.[i])

Por que trabalhar com propósitos tão entrecruzados? Há dois bons motivos. O pri é que você poderia, afinal, estar errado; o enunciado que você julga verdadeiro na real é falso, e todo seu esforço para prová-lo está condenado à inutilidade. Refutá-lo de n um tipo de garantia contra desperdício tão gigantesco.

Mas há um motivo mais profundo. Se alguma coisa é verdadeira e você tenta refu você fracassará. Nós somos treinados a pensar no fracasso como algo ruim, mas não *ruim* assim. Você pode aprender com o fracasso. Você tenta refutar a afirmação de un e dá de cara com uma parede. Tenta de outro jeito e bate noutra parede. Toda vez você e a cada noite fracassa, a cada noite há uma nova parede, e, se tiver sorte, essas pa começam a se juntar numa estrutura, e essa estrutura é a estrutura da prova do teo Pois se você realmente entende *o que o impede* de refutar o teorema, provavelmente e derá, de uma maneira que antes lhe era inacessível, por que o teorema é verdadeiro.

Foi isso que aconteceu com Bolyai, que desprezou o conselho bem-intencionado c e tentou, como tantos antes dele, provar que o postulado das paralelas era consequênc

demais, foi capaz de entender o formato do seu fracasso. O que bloqueava todas as tentativas de provar que não havia geometria sem o postulado das paralelas era justar a existência dessa geometria! A cada tentativa fracassada ele aprendia mais sobre as c terísticas daquela coisa que ele não imaginava existir, vindo a conhecê-la mais intiman até o momento em que percebeu que ela estava realmente lá.

Provar de dia e refutar de noite não é só para a matemática. Eu considero um bom h fazer pressão sobre nossas crenças sociais, políticas, científicas e filosóficas. Acredite na que você acredita de dia, mas à noite argumente contra as proposições que lhe são caras. Não trapaceie! Na maior medida possível, você deve pensar como se acreditas que não acredita. E se não conseguir se convencer a abandonar suas crenças, saberá mais sobre *por que* você acredita no que acredita. Você chegou um pouquinho mais de uma prova.

Aliás, esse salutar exercício mental não é absolutamente aquilo de que F. Scott Fitzg estava falando. Seu aval para manter crenças contraditórias vem de "The crack-up", cole de ensaios, de 1936, sobre seu próprio estado de irreparável desolação. As ideias oposta ele tinha na cabeça ali são "o senso de futilidade do esforço e o senso da necessida lutar". Samuel Beckett disse isso depois, de forma mais sucinta: "Eu não posso continu vou continuar."[15] A caracterização de Fitzgerald de uma "inteligência de primeira c pretende negar essa designação à sua própria inteligência. Da maneira como a encar pressão da contradição fizera com que ele efetivamente cessasse de existir, como a teor conjuntos de Frege ou um computador estragado por um paradoxo de Kirk. (Os H martins, em alguma outra parte de "Sitting on a fence", mais ou menos resumem "The c up": "Menti a mim mesmo desde o começo/ e acabei de descobrir que estou desmoronar Desumanizado e desfeito pela dúvida de si mesmo, afogado em livros e introspecção, tornara exatamente o tipo de jovem literato triste que fazia Theodore Roosevelt vomit

David Foster Wallace também se interessava pelo paradoxo. Em seu caracteristicamente matemático, ele introduziu uma versão domesticada do parado Russell no centro de seu primeiro romance, *The Broom of the System*. Não é exagerado que sua escrita era guiada por sua luta com contradições. Ele era apaixonado pelo técı analítico, mas via que os ditos da religião e da autoajuda ofereciam armas melhores c as drogas, o desespero e o solipsismo que mata. Ele sabia que devia ser função do es entrar na cabeça das pessoas, mas seu tema principal era a sina de ficar firmemente enca dentro da própria cabeça. Determinado a registrar e neutralizar[16] a influência de próprias preocupações e preconceitos, sabia que essa determinação, em si, estava entre preocupações e era sujeita a esses preconceitos.

Isso é tema de introdução à filosofia no primeiro ano da faculdade, com toda a ce mas, como qualquer estudante de matemática sabe, os velhos problemas que você enc no primeiro ano estão entre os mais profundos que você vai encontrar. Wallace lutou os paradoxos da mesma forma que os matemáticos. Você acredita em duas coisa parecem estar em oposição. Então você se põe a trabalhar – passo a passo, limpar terreno, separando o que você sabe daquilo em que você acredita, mantendo as hipó oponentes lado a lado na sua mente e encarando cada uma sob a luz adversária da outı

Quanto a Beckett, ele tinha uma visão mais rica e empática da contradição, tão onipre em seu trabalho que assume toda cor emocional possível em um ou outro ponto d obra. “Eu não posso continuar, eu vou continuar” é desolador; mas Beckett também re à prova pitagórica da irracionalidade da raiz quadrada de 2, transformando-a numa entre bêbados.

– Mas ouse me trair – disse Neary –, e você irá pelo caminho de Hipaso.[17]
– O acusmático, presumo eu – disse Wylie. – Sua retribuição me escapa da mente.
– Afogado num atoleiro – disse Neary –, por ter divulgado a incomensurabilidade do lado e da diagonal.
– Assim pereçam todos os tagarelas – disse Wylie.

Não fica claro quanto de matemática Beckett sabia, porém, em sua peça *Worstwar* escrita nos seus últimos anos de vida, ele sintetiza melhor o valor do fracasso na cı matemática que qualquer catedrático já fez: “Sempre tentei. Sempre fracassei. Não fa: Tentar de novo. Fracassar de novo. Fracassar melhor.”

## Quando é que eu vou usar isso?

Os matemáticos que encontramos neste livro não são apenas perfurações de certezas tificadas, não são apenas críticos que contam. Eles descobriram coisas e construíram c Galton revelou a ideia de regressão à média; Condorcet construiu um novo paradigma a tomada de decisão em questões sociais; Bolyai criou uma geometria inteiramente “um estranho Universo novo”; Shannon e Hamming fizeram uma geometria própri espaço onde viviam sinais digitais em vez de círculos e triângulos; Wald colocou a co na parte certa do avião.

Todo matemático cria coisas novas, algumas grandes, outras pequenas. Toda e matemática é uma escrita criativa. As entidades que podemos criar matematicament estão sujeitas a limites físicos, podem ser finitas ou infinitas, podem ser visualizáve nosso universo observacional ou não. Isso às vezes leva as pessoas de fora a pensa matemáticos como viajantes num reino psicodélico de perigoso fogo mental, enfren visões que fariam enlouquecer os seres inferiores, às vezes eles próprios levados à lou

Como vimos, não é nada disso. Nós matemáticos não somos malucos, não s alienígenas e não somos místicos.

Verdade é que a sensação do entendimento matemático – de subitamente saber está se passando, com certeza absoluta, *tudo, tudo até o fundo* – é uma coisa especial, po de ser obtida em poucos lugares na vida, se é que há algum outro lugar. Você sent chegou às entranhas do Universo e encostou a mão no fio. É uma coisa difícil de des para as pessoas que não tiveram essa experiência.

Nós não estamos livres para dizer tudo que nos passe na cabeça acerca das entidade criamos. Elas exigem definição; e, uma vez definidas, não são mais psicodélicas d árvores e peixes. Elas são o que são. Fazer matemática é ser, a um só tempo, tocado fogo e limitado pela razão. Isso não é uma contradição. A lógica forma um estreito através do qual a intuição flui com uma força imensamente ampliada.

As lições da matemática são simples e nelas não há números: existe estrutura no m
Podemos ter esperança de entender algo desse mundo e não simplesmente ficar emb
cados com o que os nossos sentidos nos apresentam. Nossa intuição fica mais forte co
exoesqueleto formal do que sem ele. A certeza matemática é uma coisa, as deli
convicções que descobrimos atadas a nós na vida cotidiana são outra, e, na medi
possível, devemos permanecer cientes dessa diferença.

Toda vez que você observa que maior quantidade de uma coisa boa nem sempre é m
ou que você se lembra de que coisas improváveis acontecem com frequência, dad
oportunidades suficientes, e que resiste à sedução do corretor de Baltimore; ou que
uma decisão baseada não só no futuro mais provável, porém na nuvem de todos os fu
possíveis, com atenção àqueles mais prováveis e àqueles improváveis; ou que você aban
a ideia de que as crenças de grupos devem estar sujeitas às mesmas regras que as cren
indivíduos; e que, simplesmente, você descobre aquele pontinho cognitivo gostoso
pode deixar sua intuição correr solta na rede de trilhas que o raciocínio formal prepar
ela; que se escreve uma equação ou desenha um gráfico – você está fazendo matemát
extensão do senso comum por outros meios. Quando é que você vai usar isso? Voc
usando matemática desde que nasceu e provavelmente nunca vai parar de usar. Use-a

---

[a] A opinião de Roosevelt, de que o analítico "aprendizado pelos livros" se opõe à virilidade, é expressa mais diret
por Shakespeare, que, na cena de abertura de *Otelo*, faz Iago ridicularizar seu rival Cássio chamando-o de "
matemático/ … /que nunca pôs em campo um esquadrão,/ Tampouco conhece, mais que uma solteirona,/ a div
batalha". Esse é o ponto da peça em que todo matemático na plateia percebe que Iago é o bandido da história.

[b] "And you see, both of us were right, though nothing/ Has somehow come to nothing; the avatars/ Of our confor
the rules and living/ Around the home have made – well, in a sense, 'good citizens' of us,/ Brushing the teeth and
and learning to accept/ The charity of the hard moments as they are doled out,/ For this is action, this not being s
careless/ Preparing, sowing the seeds crooked in the furrow,/ Making ready to forget, and always coming back/
mooring of starting out, that day so long ago." (N.T.)

[c] "Sitting on a fence is a man who swings from poll to poll/ Sitting on a fence is a man who sees both sides of both s
But the real problem with this man/ Is he says he can't when he can." (N.T.)

[d] "A kind of fence-sitting/ Raised to the level of an esthetic ideal." (N.T.)

[e] Ashbery começa a segunda parte, e final, de "Soonest mended" com os versos: "Estes foram então percalços do ca
Embora soubéssemos que o caminho *era* de percalços e nada mais" ("These then were some hazards of the course/
we knew the course *was* hazards and nothing else"). Ashbery, que viveu na França por uma década, decerto se
palavra inglesa para percalço, *hazard*, no sentido seguido de perto pelo eco da palavra em francês *hasard*, que s
"chance", condizente com a atmosfera geral do poema, de rigorosa incerteza. Pascal chamava os jogos que deba
Fermat de *jeux de hazard* ["jogos de azar", em português], e a origem inicial era a palavra árabe para "dado".

[f] Há outras razões, mais sofisticadas, que podem gerar ceticismo em relação à abordagem de Silver, embora não
dominantes em meio ao corpo jornalístico de Washington. Por exemplo, poderíamos seguir a linha de raciocínio d
e dizer que a linguagem da probabilidade é inadequada para eventos de ocorrência única, e que somente se aplica
do tipo cara ou coroa, que podem, em princípio, ser repetidas muitas e muitas vezes.

[g] Para ser preciso, foi sua previsão *final* que acertou todos os cinquenta estados. Em 26 de outubro, ele acertou tod
exceção da Flórida, onde as pesquisas oscilavam, dando Romney aproximadamente empatado nas últimas duas s
de campanha.

[h] Claro que, se você quisesse montar o esquema corretamente, deveria modificar o lançamento da moeda para d
ligeira vantagem ao candidato que parece estar um pouquinho na frente etc. etc. etc.

[i] No final ele não teve êxito em nenhuma das duas tarefas. A conjectura de Poincaré acabou comprovada por
Perelman, em 2003.

[j] "I lied to myself right from the start/ and I just worked out that I'm falling apart." (N.T.)

# *Notas*

## Introdução: Quando será que eu vou usar isso?

1. Material biográfico sobre Abraham Wald apud Oscar Morgenstern, "Abraham 1902-1950", *Econometrica*, v.19, n.4, out 1951, p.361-7.
2. O material histórico sobre o SRG é tirado em grande parte de W. Allen Wallis, Statistical Research Group, 1942-1945", *Journal of the American Statistical Associ* v.75, n.370, jun 1980, p.320-30.
3. Ibid., p.322.
4. Ibid., p.322.
5. Ibid., p.329.
6. Fiquei sabendo sobre Wald e as balas ausentes nos aviões pelo livro de Howard W *Uneducated Guesses: Using Evidence to Uncover Misguided Education Policies*, Princ NJ, Princeton University Press, 2011; ele aplica os insights de Wald às estatísticas pa e também complicadas obtidas em estudos sobre educação.
7. Marc Mangel e Francisco J. Samaniego, "Abraham Wald's work on aircraft survival *Journal of the American Statistical Association*, v.79, n.386, jun 1984, p.259-67.
8. Jacob Wolfowitz, "Abraham Wald, 1902-1950", *Annals of Mathematical Statistics*, n.1, mar 1952, p.1-13.
9. Amy L. Barrett e Brent R. Brodeski, "Survivor bias and improper measurement: ho Mutual Fund Industry inflates actively managed fund performance"; disponíve www.savantcapital.com/uploadedFiles/Savant_CMS_Website/ Press_Cove Press_Releases/Older_releases/sbiasstudy[1].pdf, acesso em 13 jan 2014.
10. Martin Rohleder, Hendrik Scholz e Marco Wilkens, "Survivorship bias and mutual performance: relevance, significance and methodical differences", *Review of Fir* n.15, 2011, p.441-74; ver tabela. Convertemos o excesso de retorno mensal para ex de retorno anual, de modo que os números no texto não conferem com os da tabe
11. Abraham Wald, "A method of estimating plane vulnerability based on dama survivors", Alexandria, VA, Center for Naval Analyses, repr. CRC, n.432, jul 1980.
12. Para a hipótese de Riemann, gosto de *Prime Obsession*, de John Derbyshire, e *A n dos números primos*, de Marcus du Sautoy. Para o teorema de Gödel, há obviar

*Gödel, Escher, Bach*, de Douglas Hofstadter, que, para ser justo, apenas tanger teorema como um mantra numa meditação sobre autorreferência em arte, mú lógica.

## 1. Menos parecido com a Suécia

1. Daniel J. Mitchell, "Why is Obama trying to make America more like Sweden Swedes are trying to be less like Sweden?", Cato Institute, 16 mar 2010; disponív www.cato.org/blog/why-obama-trying-make-america-moresweden-when-swede trying-be-less-sweden; acesso em 13 jan 2014.
2. Horace, *Satires*, 1.1.106, in "Satis/Satura: reconsidering the 'Programmatic inte Horace 'Satires', 1.1", *Classical World*, 2000, p.579-90.
3. Laffer sempre foi muito claro a respeito do fato de a curva de Laffer não ter sido inv sua; Keynes havia entendido e escrito sobre a ideia com bastante discernimento; a básica remonta (pelo menos) ao historiador do século XIV Ibn Khaldun.
4. Jonathan Chait, "Prophet motive", *New Republic*, 31 mar 1997.
5. Hal R. Varian, "What use is economic theory?", 1989; disponível em: h people.ischool.berkeley.edu/˜hal/Papers/theory.pdf; acesso em 13 jan 2014.
6. David Stockman, *The Triumph of Politics: How the Reagan Revolution Failed*, Nova Harper & Row, 1986, p.10.
7. N. Gregory Mankiw, *Principles of Microeconomics*, v.1, Amsterdam, Elsevier, 1998, p
8. Em 1978, durante consideração da lei Kemp-Roth de corte de impostos.

## 2. Localmente reto, globalmente curvo

1. Christopher Riedweg, *Pythagoras: His Life, Teaching, and Influence*, Ithaca, NY, C University Press, 2005, p.2.
2. George Berkeley, *The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician* (1 David R. Wilkins; disponível em: www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berk Analyst/analyst.pdf; acesso em 13 jan 2014.
3. David O. Tall e Rolph L.E. Schwarzenberger, "Conflicts in the learning of real nu and limits", *Mathematics Teaching*, n.82, 1978, p.44-9.
4. O material sobre Grandi e suas séries é em grande parte tirado de Morris Kline, " and infinite series", *Mathematics Magazine*, v.56, n.5, nov 1983, p.307-14.
5. A história da aula de cálculo de Cauchy é tirada de *Duel at Dawn*, o estudo hist muitíssimo interessante de Amir Alexander sobre a interação entre matemática e c no começo do século XIX. Ver também Michael J. Barany, "Stuck in the middle: Ca intermediate value theorem and the history of analytic rigor", *Notices of the Am Mathematical Society*, v.60, n.10, nov 2013, p.1334-8, para um ponto de vista ligeira

**3. Todo mundo é obeso**

1. Youfa Wang et al., "Will all Americans become overweight or obese? Estimatir progression and cost of the US obesity epidemic", *Obesity*, v.16, n.10, out 2008, p.232
2. Disponível em: abcnews.go.com/Health/Fitness/story?id=5499878&page=1.
3. *Long Beach Press-Telegram*, 17 ago 2008.
4. Minha discussão sobre o estudo de obesidade de Wang concorda amplamente cor que está no artigo de Carl Bialik, "Obesity study looks thin", *Wall Street Journal*, 1 2008, que fiquei conhecendo após ter escrito este capítulo.
5. Os valores aqui são de www.soicc.state.nc.us/soicc/planning/c2c.htm, que desde foi tirado do ar.
6. Katherine M. Flegal et al., "Prevalence of obesity and trends in the distribution of mass index among US adults, 1999-2010", *Journal of the American Medical Associ* v.307, n.5, 1º fev 2012, p.491-7.

**4. Quanto é isso em termos de americanos mortos?**

1. Daniel Byman, "Do targeted killings work?", *Foreign Affairs*, v.85, n.2, mar-abr p.95.
2. "Expressing solidarity with Israel in the fight against terrorism", *H.R. Res*, n.280 Congresso, 2001.
3. Parte do material deste capítulo é adaptada de meu artigo "Proportionate resp *Slate*, 24 jul 2006.
4. De *Meet the Press*, 16 jul 2006; disponível em: www.nbcnews.com/id/13839698/pa #.Uf_Gc2TEo9E; acesso em 13 jan 2014.
5. "What Israel wants from the Palestinians, it takes", *Los Angeles Times*, 17 set 2010.
6. Gerald Caplan, "We must give Nicaragua more aid", *Toronto Star*, 8 mai 1988.
7. David K. Shipler, "Robert McNamara and the ghosts of Vietnam", *New York Magazine*, 10 ago 1997, p.30-5.
8. Os dados sobre câncer cerebral são todos de "State cancer profiles", National C Institution; disponível em: http://statecancerprofiles.cancer.gov/cgi-bin/death deathrates.pl?00&076&00&2&001&1&1&1; acesso em 13 jan 2014.
9. O exemplo de taxas de câncer cerebral deve muito a um tratamento semelhar estatística de câncer renal condado por condado, em Howard Wainer, *Picturir Uncertain World*, Princeton, NJ, Princeton University Press, 2009, que desenvolve a muito mais minuciosamente do que faço aqui.
10. John E. Kerrich, "Random remarks", *American Statistician*, v.15, n.3, jun 1961, p.1

**11.** As contagens de pontos para 1999 apud "A report card for the ABCs of public educ v.I, 1998-1999 growth and performance of public schools in North Carolina, 25 improved K-8 schools"; disponível em: www.ncpublicschools.org/abc_results/ ts_99/ 99ABCsTop25.pdf; acesso em 13 jan 2014.

**12.** Thomas J. Kane e Douglas O. Staiger, "The promise and pitfalls of using imprecise s accountability measures", *Journal of Economic Perspectives*, v.16, n.4, outono de p.91-114.

**13.** Ver Kenneth G. Manton et al., "Empirical Bayes procedures for stabilizing maps c cancer mortality rates", *Journal of the American Statistical Association*, v.84, n.40 1989, p.637-50; e Andrew Gelman e Phillip N. Price, "All maps of parameter esti are misleading", *Statistics in Medicine*, v.18, n.23, 1999, p.3221-34; se quiser sa tratamento técnico sem restrições.

**14.** Stephen M. Stigler, *Statistics on the Table: The History of Statistical Concepts and Me* Cambridge, MA, Harvard University Press, 1995, p.18.

**15.** Ver, por exemplo, Ian Hacking, *The Emergence of Probability: A Philosophical St Early Ideas about Probability, Induction, and Statistical Inference*, 2ª ed., Camb Cambridge University Press, 2006, cap.18.

**16.** As cifras de White aqui apud Matthew White, "30 worst atrocities of the 20th Cen disponível em: http://users.erols.com/mwhite28/atrox.htm; acesso em 13 jan 2014

## 5. A pizza maior que o prato

**1.** A. Michael Spence e Sandile Hlatshwayo, "The evolving structure of the Ame economy and the employment challenge", Council of Foreign Relations, mar disponível em: www.cfr.org/industrial-policy/evolving-structure-americanecon employment-challenge/p24366; acesso em 13 jan 2014.

**2.** "Move Over", *Economist*, 7 jul 2012.

**3.** William J. Clinton, *Back to Work: Why We Need Smart Government for a Strong Eco* Nova York, Random House, 2011, p.167.

**4.** Jacqueline A. Stedall, *From Cardano's Great Art to Lagrange's Reflections: Filling a G the History of Algebra*, Zurique, European Mathematical Society, 2011, p.14.

**5.** Milwaukee Journal Sentinel, PolitiFact; disponível em: www.politifact.com/wisc statements/2011/jul28/ republican-party-wisconsin/wisconsin-republicanparty- more-than-half-nat; acesso em 13 jan 2014.

**6.** WTMJ News, Milwaukee, "Sensenbrenner, voters take part in contentious tow meeting over Federal Debt"; disponível em: www.todaystmj4.com/ local/126122793.html; acesso em 13 jan 2014.

**7.** Todos os dados sobre empregos aqui provêm de "June 2011 Regional and Employment and Unemployment (Monthly) News Release", Bureau of Labor Stat

8. Steven Rattner, "The rich get even richer", *New York Times*, 26 mar 2012, p.A27.
9. Disponível em: elsa.berkeley.edu/~saez/TabFig2010.xls; acesso em 13 jan 2014.
10. Mitt Romney, "Women and the Obama economy", 10 abr 2012; disponíve www.scribd.com/doc/88740691/Women-And-The-Obama-Economy-Infographic
11. Ibid.

## 6. O corretor de ações de Baltimore e o código da Bíblia

1. Maimonides, *Laws of Idolatry* 1.2; Isadore Twersky, *A Maimonides Reader*, Nova Behrman House, Inc., 1972, p.73.
2. Yehuda Bauer, *Jews for Sale? Nazi-Jewish Negotiations, 1933-1945*, New Haven University Press, 1996, p.74-90.
3. Doron Witztum, Eliyahu Rips e Yoav Rosenberg, "Equidistant letter sequences i book of Genesis", *Statistical Science*, v.9, n.3, 1994, p.429-38.
4. Robert E. Kass, "In this issue", *Statistical Science*, v.9, n.3, 1994, p.305-6.
5. Shlomo Sternberg, "Comments on *The Bible Code*", *Notices of the American Mathem Society*, v.44, n.8, set 1997, p.938-9.
6. Alan Palmiter e Ahmed Taha, "Star creation: the incubation of mutual funds", *Vanc Law Review*, n.62, 2009, p.1485-534. Palmiter e Taha expõem explicitamente a an entre o corretor de ações de Baltimore e a incubação dos fundos.
7. Ibid., p.1503.
8. Leonard A. Stefanski, "The North Carolina lottery coincidence", *American Statist* v.62, n.2, 2008, p.130-4.
9. Aristotle, *Rethoric* 2.24; disponível em: classics.mit.edu/Aristotle/rethoric.mb.txt; a em 14 jan 2014.
10. Ronald A. Fisher, *The Design of Experiments*, Edimburgo, Oliver & Boyd, 1935, p.
11. Brendan McKay e Dror Bar-Natan, "Equidistant letter sequences in Tolstoy's *Wa Peace*"; disponível em: cs.anu.edu.au/~bdm/dilugim/WNP/main.pdf; acesso em 2014.
12. Brendan McKay, Dror Bar-Natan, Maya Bar-Hillel e Gil Kalai, "Solving the Bible puzzle", *Statistical Science*, v.14, n.2, 1999, p.150-73, seção 6.
13. Ibid.
14. *New York Times*, 8 dez 2010, p.A27.
15. Ver, por exemplo, o artigo de Witztum "Of science and parody: a complete refutat MBBK's central claim"; disponível em: www.torahcode.co.il/english/paro_hb.htm; so em 14 jan 2014.

## 7. Peixe morto não lê mentes

**1.** Craig M. Bennett et al., "Neural correlates on interspecies perspective taking in the mortem Atlantic Salmon. An argument for proper multiple comparisons correc *Journal of Serendipitous and Unexpected Results*, n.1, 2010, p.1-5.

**2.** Ibid., p.2.

**3.** Gershon Legman, *Rationale of the Dirty Joke: An Analysis of Sexual Humor*, Nova Grove, 1968; reimpr., Simon & Schuster, 2006.

**4.** Ver, por exemplo, Stanislas Dehaene, *The Number Sense: How the Mind C Mathematics*, Nova York, Oxford University Press, 1997.

**5.** Richard W. Feldmann, "The Cardano-Tartaglia dispute", *Mathematics Teacher*, v.5 1961, p.160-3.

**6.** Material sobre Arbuthnot apud Capítulo 18 de Ian Hacking, *The Emergence of Proba* Nova York, Cambridge University Press, 1975; e Capítulo 6 de Stephen M. Stigle *History of Statistics*, Cambridge, MA, Harvard University Press/ Belknap Press, 19

**7.** Ver Elliot Sober, *Evidence and Evolution: The Logic Behind the Science*, Nova Cambridge University Press, 2008, para uma discussão minuciosa de muitas, n vertentes, tanto clássicas quanto contemporâneas, deste "argumento de um projet

**8.** Charles Darwin, *The Origin of Species*, 6ª ed., Londres, 1872, p.421.

**9.** Richard J. Gerrig e Philip George Zimbardo, *Psychology and Life*, Boston, Allyn & B 2002.

**10.** David Bakan, "The test of significance in psychological research", *Psychological Bu* v.66, n.6, 1966, p.423-37.

**11.** Apud Ann Furedi, "Social consequences: the public health implications of the 199 scare' ", *Human Reproduction Update*, v.5, n.6, 1999, p.621-6.

**12.** Edith M. Lederer, "Government warns some birth control pills may cause blood Associated Press, 19 out 1995.

**13.** Sally Hope, "Third generation oral contraceptives: 12% of women stopped taking pill immediately they heard CSM's warning", *British Medical Journal*, v.312, n.7030, p. 576.

**14.** "Social consequences", op.cit., p.623.

**15.** Klim McPherson, "Third generation oral contraception and venous thromboemb ", *British Medical Journal*, v.312, n.7023, 1996, p.68.

**16.** Julia Wrigley e Joanna Dreby, "Fatalities and the organization of child care in the U States, 1985-2003", *American Sociological Review*, v.70, n.5, 2005, p.729-57.

**17.** Todas as estatísticas sobre mortes infantis apud Centers for Disease Control. She Murphy, Jiaquan Xu e Kenneth D. Kochanek "Deaths: final data for 2010"; dispo em: www.cdc.gov/nchs/data/nvsr/nvsr6l/nvsr6l/04.pdf.

**18.** O material biográfico sobre Skinner é apud seu artigo autobiográfico "B.F. Skinn autobiography", in Peter B. Dews (org.), *Festschrift for BF Skinner*, Nova York, Appl Century-Crofts, 1970, p.1-22; e de sua autobiografia, *Particulars of My Life*, ( p.262-3.

**19.** Skinner, "Autobiography", p.6.

**20.** Ibid., p.8.

**21.** Skinner, *Particulars*, p.262.

**22.** Skinner, "Autobiography", p.7.

**23.** Skinner, *Particulars*, p.292.

**24.** John B. Watson, *Behaviorism*, Livingstone, NJ, Transaction Publishers, 1998, p.4.

**25.** Skinner, "Autobiography", p.12.

**26.** Ibid., p.6.

**27.** Joshua Gang,"Behaviorism and the beginnings of close reading", *English Literary Hi* v.78, n.1, 2011, p.1-25.

**28.** B.F. Skinner, "The alliteration in Shakespeare's sonnets: a study in literary beha *Psychological Record*, n.3, 1939, p.186-92. Fiquei sabendo a respeito do traball Skinner sobre aliteração pelo clássico artigo de Persi Diaconis e Frederick Mos "Methods for studying coincidences", *Journal of the American Statistical Associ* v.84, n.408, 1989, p.853-61, leitura essencial para quem quiser se aprofundar nas debatidas neste capítulo.

**29.** "Alliteration in Shakespeare's sonnets", p.191.

**30.** Ver, por exemplo, Ulrich K. Goldsmith, "Words out of a hat? Alliteration and asso in Shakespeare's sonnets", *Journal of English and Germanic Philology*, v.49, n.1, p.33-48.

**31.** Herbert D. Ward, "The trick of alliteration", *North American Review*, v.150, n.398, p.140-2.

**32.** Thomas Gilovich, Robert Vallone e Amos Tversky, "The hot hand in basketball: c misperception of random sequences", *Cognitive Psychology*, v.17, n.3, 1985, p.293-

**33.** Kevin B. Korb e Michael Stillwell, "The story of the hot hand: powerful myth or pow critique?", artigo acadêmico apresentado na Conferência Internacional de Ciência nitiva, 2003; disponível em: www.csse.monash.edu.au/~korb/iccs.pdf.

**34.** Gur Yaar e Shmuel Eisenmann, "The hot (invisible) hand: can time sequence pa of success/failure in sports be modeled as repeated random independent trials?" *One*, v.6, n.10, 2011, p.e24532.

**35.** Em relação a isso, eu realmente gosto do artigo de 2011, "Differentiating skill anc in financial markets with streaks", de Andrew Mauboussin e Samuel Arbesman; trabalho especialmente impressionante, considerando que o primeiro autor era do último ano do ensino médio quando o artigo foi escrito! Não creio que suas concl

sejam decisivas, mas acho que representa um modo muito bom de se pensar sobre problemas difíceis; disponível em: papers.ssrn.com/sol3/papers abstract_id=1664031.

**36.** Comunicação pessoal com Huizinga.

**37.** Yigal Attali, "Perceived hotness affects behavior of basketball players and coa *Psychological Science*, v.24, n.7, 1 jul 2013, p.1151-6.

## 8. *Reductio ad* improvável

**1.** Allison Klein, "Homicides decrease in Washington region", *Washington Post*, 3 2012.

**2.** David W. Hughes e Susan Cartwright, "John Michell, the Pleiades, and odds of 49 to 1", *Journal of Astronomical History and Heritage*, n.10, 2007, p.93-9.

**3.** As duas figuras de pontos espalhados pelo quadrado foram geradas por Yuval Per Microsoft Research, e apud seu "Gaussian analytic functions"; disponível em: h research.microsoft.com/en-us/um/people/peres/GAF/GAF.html.

**4.** Ronald A. Fisher, *Statistical Methods and Scientific Inference*, Edimburgo, Oliver & 1959, p.39.

**5.** "Tests of significance considered as evidence", *Journal of the American Stat Association*, v.37, n.219, 1942, p.325-35.

**6.** A história do trabalho de Zhang na conjectura do intervalo delimitado é adapta meu artigo "The beauty of bounded gaps", *Slate*, 22 mai 2013. Ver Yitang Z "Bounded gap between primes", *Annals of Mathematics*, a ser publicado em breve.

## 9. A *Revista Internacional de Haruspício*

**1.** Você pode ler a versão do próprio Shalizi em seu blog, http://bactr weblog/698.html.

**2.** John P.A. Ioannidis, "Why most published research findings are false", *PLoS Mec* v.2, n.8, 2005, p.e124; disponível em: www.plosmedicine.org/article/info:doi/10. journal.pmed.0020124.

**3.** Para uma avaliação dos riscos de estudos de baixa potência em neurociênci Katherine S. Button et al., "Power failure: why small sample size undermines the bility of neuroscience", *Nature Reviews Neuroscience*, n.14, 2013, p.365-76.

**4.** Kristina M. Durante, Ashley Rae e Vladas Griskevicius, "The fluctuating female politics, religion and the ovulatory cycle", *Psychological Science*, v.24, n.6, 2013, p.10 Sou grato a Andrew Gelman pelas conversas sobre a metodologia desse artigo e post em seu blog sobre ele (disponível em: http://andrewgelman.com/2013/05/17/ can-statisticians-help-psychologists-do-their-research-better), do qual minha an retirada, em grande parte.

**5.** Ver Andrew Gelman e David Weakliem, "Of beauty, sex and power: statistical chall in estimating small effects", *American Scientist*, n.97, 2009, p.310-6, para um exe elaborado desse fenômeno no contexto da questão de se pessoas de boa aparênci mais filhas que filhos. (Necas.)

**6.** Christopher F. Chabris et al., "Most reported genetic associations with ge intelligence are probably false positives", *Psychological Science*, v.23, n.11, p.1314-23.

**7.** C. Glenn Begley e Lee M. Ellis, "Drug development: raise standards for preclinical c research", *Nature*, v.483, n.7391, 2012, p.531-3.

**8.** Uri Simonsohn, Leif Nelson e Joseph Simmons, "*P*-curve: a key to the file dr *Journal of Experimental Psychology: General*, no prelo. As curvas esboçadas nessa são as "curvas-*p*" descritas no artigo.

**9.** Algumas referências representativas: Alan Gerber e Neil Malhotra, "Do stat reporting standards affect what is published? Publication bias in two leading po science journals", *Quarterly Journal of Political Science*, v.3, n.3, 2008, p.313-26. A Gerber e Neil Malhotra, "Publication bias in empirical sociological research: do arb significance levels distort published results?", *Sociological Method & Research*, v.3 2008, p.3-30; e E.J. Masicampo e Daniel R. Lalande, "A peculiar prevalence of *P*-v just below .05", *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, v.65, n.11, 2012, p.22

**10.** *Matrixx Initiatives, Inc. v. Siracusano*, 2ª ed., 131 S. Ct. 1309, 563 U.S., 179 L. 2011.

**11.** Robert Rector e Kirk A. Johnson, "Adolescente virginity pledges and risky s behaviors", Heritage Foundation, 2005; disponível em: www.heritage.org/researc ports/2005/06/adolescent-virginity-pledges-and-risky-sexual-behaviors; acesso e jan 2014.

**12.** Robert Rector, Kirk A. Kohnson e Patrick F. Fagan, "Understanding differences in and white child poverty rates", Heritage Center for Data Analysis Report CDA( n.20, 2001, p.15, apud Jordan Ellenberg, "Sex and significance", *Slate*, 5 jul 2005; d nível em: http://thf_media.s3amazonaws.com/2001/pdf/cda01-04.pdf; acesso em 2014.

**13.** Michael Fitzgerald e Ioan James, *The Mind of the Mathematician*, Baltimore, Hopkins University Press, 2007, p.151, apud Francisco Louçã, "The widest cl statistics: how and why Fisher opposed Neyman and Pearson", Departamento de nomia da Escola de Economia e Administração, Lisboa, artigo de trabalho, 02/ DE/UECE; disponível em: www.iseg.utl.pt./departamentos/economi wp022008deuece.pdf; acesso em 14 jan 2014. Note que o livro de Fitzgerald- parece decidido a argumentar que grande número de matemáticos de sucesso ao da história tinham síndrome de Asperger, de modo que sua avaliação do desen mento social de Fisher deve ser lido com isso em mente.

**14.** Carta a Hick de 8 out 1951, in J.H. Bennett (org.), *Statistical Inference and An Selected Correspondence of R.A. Fisher*, Oxford, Clarendon Press, 1990, p.144,

**15.** Ronald A. Fisher, "The arrangement of field experiment", *Journal of The Minis Agriculture of Great Britain*, n.33, 1926, p.503-13, apud breve artigo de Jerry Dallal p = 0,05?" (disponível em www.jerrydallal.com/LHSP/p05.htm), uma boa intro ao pensamento de Fisher sobre o assunto.

**16.** Ronald A. Fisher, *Statistical Methods and Scientific Inference*, Edimburgo, Oliver & 1956, p.41-2, também citado in Dallal, op.cit.

**10. Ei, Deus, você está aí? Sou eu, a inferência bayesiana**

**1.** Charles Duhigg, "How companies learn your secrets", *New York Times Magazine*, 2012.

**2.** Peter Lynch e Owen Lynch, "Forecasts by Phoniac", *Weather*, v.63, n.11, 2008, p.32

**3.** Ian Roulstone e John Norbury, *Invisible in the Storm: The Role of Mathemat Understanding Weather*, Princeton, NJ, Princeton University Press, 2013, p.281.

**4.** Edward N. Lorenz, "The predictability of hydrodynamic flow", *Transactions of the York Academy of Sciences*, série 2, v.25, n.4, 1963, p.409-32.

**5.** Eugenia Kalnay, *Atmospheric Modeling, Data Assimilation, and Predicta* Cambridge, Cambridge University Press, 2003, p.26.

**6.** Jordan Ellenberg, "This psychologist might outsmart the math brains competir Netflix Prize", *Wired*, mar 2008, p.114-22.

**7.** Xavier Amatriain e Justin Basilico, "Netflix recommendations: beyond the 5 disponível em: techblog.netflix.com/2012/04/Netflix-recommendations-beyo stars.html; acesso em 14 jan 2014.

**8.** Um bom relato contemporâneo da loucura extrassensorial pode ser encontra Francis Wickware, "Dr. Rhine and ESP", *Life*, 15 abr 1940.

**9.** Thomas L. Griffiths e Joshua B. Tenenbaum, "Randomness and coincidences: recon intuition and probability theory", *Proceedings of the 23rd Annual Conference Cognitive Science Society*, 2001.

**10.** Comunicação pessoal, Gary Lupyan.

**11.** Griffiths e Tenenbaum, op.cit., fig.2.

**12.** Bernd Beber e Alexandra Scacco, "The devil is in the digits", *Washington Post*, 2 2009.

**13.** Ronald A. Fisher: "Mr. Keynes's treatise on probability", *Eugenics Review*, v.14, n.1, p.46-50.

**14.** Apud David Goodstein e Gerry Neugebauer em prefácio especial para as Fey Lectures, reimpresso in Richard Feynman, *Six Easy Pieces*, Nova York, Basic B 2011, p.xxi.

**15.** O debate nesta seção deve muito ao livro de Elliott Sober, *Evidence and Evolution*,

16. Aileen Fyfe, "The reception of William Paley's *Natural Theology* in the Univers Cambridge", *British Journal for the History of Science*, v.30, n.106, 1997, p.324.

17. Carta de Darwin a John Lubbock, 22 nov 1859, Darwin Correspondence Pr disponível em: www.darwinproject.ac.uk/letter/entry-2532; acesso em 14 jan 201

18. Nick Bostrom, "Are we living in a computer simulation?", *Philosophical Quarterly* n.211, 2003, p.243-55.

19. O argumento de Bostrom em favor de SIMs tem mais conteúdo que este; é contro porém não imediatamente descartável.

**11. O que esperar quando você espera ganhar na loteria**

1. Toda a informação sobre a loteria genovesa é de David R. Bellhouse, "The Ge Lottery", *Statistical Science*, v.6, n.2, mai 1991, p.141-8.

2. Stoughton Hall e Holworthy Hall.

3. Adam Smith, *The Wealth of Nations*, Nova York, Wiley, 2010, livro I, cap.10, p.102

4. A história de Halley e da anuidade com preços inadequados provém do Capítulo Ian Hacking, *The Emergence of Probability*, Nova York, Cambridge University 1975.

5. Comunicação pessoal do departamento da loteria Powerball PR.

6. "Jackpot History"; disponível em: www.lottostrategies.com/script/jackpot_hi draw_date/101; acesso em 14 jan 2014.

7. Ver John Haigh, "The statistics of lotteries", in Donald B. Hausch e William Th Ziemba (orgs.), *Handbook of Sports and Lottery Markets*, cap.23, Amsterdam, Els 2008, para um levantamento de resultados conhecidos cujas combinações os joga na loteria preferem e quais eles evitam.

8. Carta de Gregory W. Sullivan, inspetor-geral da Fazenda de Massachusetts, para S Grossman, tesoureiro estadual de Massachusetts, 27 jul 2012. O relatório de Sulliv fonte para o material aqui exposto sobre apostas de grandes volumes no Cash Wi exceto onde esteja especificado de outra forma; disponível em: www.mass.gov/ig/ cations/reports-and-recommendations/2012/lottery-cash-winfall-letter-july-201 acesso em 14 jan 2014.

9. Não pude verificar a data exata da escolha do nome Random Strategies. É possív a equipe não usasse esse nome quando fez suas primeiras apostas em 2005.

10. Entrevista telefônica, Gerald Selbee, 11 fev 2013.

11. Agradecimentos a François Dorais por essa tradução para o inglês.

12. O material sobre os primeiros tempos de Buffon apud capítulos 1 e 2 de Jacques *Buffon: A Life in Natural History, trans. Sarah Lucille Bonnefoi*, Ithaca, NJ, C University Press, 1997.

13. Da tradução de "Essay on moral Arithmetic", de Buffon, feita por John D. Hey, Tib Neugebauer e Carmen M. Pasca, in Axel Ockenfels Abdolkarim Sadrieh, *The School of Behavioral Economics*, Berlim/Heidelberg, Springer Verlag, 2010, p.54.

14. Pierre Deligne, "Quelques idées maîtresses de l'oeuvre de A. Grothendieck", *Maté pour l'histoire des mathématiques au XXème siècle: actes du coloque à la mémoire d Dieudonné, Nice, 1996*. Paris, Société Mathématique de France, 1998. O original é: ne semble de passer et pourtant à la fin de l'exposé un théorème clairement non t est là." Tradução para o inglês de Colin McCarty, de seu artigo "The rising sea: Gro dieck on simplicity and generality", parte 1, *Episodes in History of Modern A (1800-1950)*, Providence, American Mathematical Society, 2007, p.301-22.

15. Das memórias de Grothendieck, *Récoltes et semailles*, apud McCarty, "Rising sea",

16. Entrevista telefônica, Gerald Selbee, 11 fev 2013. Toda a informação sobre o pa Selbee foi retirada dessa entrevista.

17. E-mail de Andrea Estes, 5 fev 2013.

18. Andrea Estes e Scott Allen, "A game with a windfall for a knowing few", *Boston* 31 jul 2011.

19. A história de Voltaire e da loteria é apud Haydn Mason, *Voltaire*, Baltimore, Hopkins University Press, 1981, p.22-3, e do artigo de Brendan Mckie "The enlig ment guide to winning the lottery"; disponível em: www.damninteresting.con enlightenment-guide-to-winning-the-lottery; acesso em 14 jan 2014.

20. Carta de Gregory W. Sullivan a Steven Grossman.

21. Estes e Allen, op.cit.

**12. Perca mais vezes o avião!**

1. Ou pelo menos todo mundo diz que ele costumava dizer isso. Não pude achar qua evidência de que ele alguma vez tenha registrado a frase por escrito.

2. "Social Security kept paying benefits to 1,546 deceased", *Washington Wire* (blog) *Street Journal*, 24 jun 2013.

3. Nicholas Beaudrot, "The Social Security administration is incredibly well disponível em: www.donkeylicious.com/2013/06/the-social-security-administra is.html.

4. Carta de Pascal a Fermat, 10 ago 1660.

5. Aqui, todo o Voltaire é da 25ª de suas "Cartas filosóficas", que consistem em comen sobre *Pensées*.

6. N. Gregory Mankiw, "My personal work incentives", 26 out 2008; disponíve gregmankiw.blogspot.com/2008/10/blog-post.html. Mankiw retorna ao mesmo em sua coluna "I can afford higher taxes, but they'll make me work less", *New York* BU3, 10 out 2010.

8. Ambas citações de Buffon, *Essays on Moral Arithmetic*, 1777.
9. Material biográfico de Ellsberg apud Tom Wells, *Wild Man: The Life and Times of I Ellsberg*, Nova York, St. Martin's, 2001; e Daniel Ellsberg, *Secrets: A Memoir of Vie and the Pentagon Papers*, Nova York, Penguin, 2003.
10. Daniel Ellsberg, "The theory and practice of blackmail", Rand Corporation, jul não publicado na época; disponível em: www.rand.org/content/dam/rand/pubs/p s/2005/P3883.pdf; acesso em 14 jan. 2014.
11. Idem, "Risk, ambiguity and the savage axioms", *Quarterly Journal of Economics*, n.4, 1961, p.643-69.

**13. Onde os trilhos do trem se encontram**)

1. A LTCM em si não sobreviveu por muito tempo, mas os principais atores saíram e se mantiveram nos arredores do setor financeiro, apesar do desastre da LTCM.
2. Otto-Joachim Gruesser e Michael Hagner, "On the history of deformation phosp and the idea of internal light generated in the eye for the purpose of vision", *Docu Ophtalmologica*, v.74, n.1-2, 1990, p.57-85.
3. David Foster Wallace, entrevistado na e-zine *Word*, 17 mai 1996; disponíve www.badgerinternet.com/~bobkat/jest11a.html; acesso em 14 jan 2014.
4. Gino Fano, "Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva", *Giornal matematiche* 30.s 106, 1892. Tradução adaptada do original in C.H. Kimberling, origins of modern axiomatics: Pash to Peano", *American Mathematical Monthly* 7 fev 1972 p.133-6
5. Explicação altamente resumida: lembre-se, o plano projetivo pode ser considerad conjunto de retas passando pela origem num espaço tridimensional, e as retas no projetivo são planos passando pela origem. Um plano passando pela origem num e tridimensional tem uma equação na forma $ax + by + cz = 0$. Assim, um plano pas pela origem num 3-espaço em números boolianos *também* é dado por uma equaç $+ by + cz = 0$, exceto que agora $a$, $b$, $c$ devem ser 0 ou 1. Logo, há oito equações pos dessa forma. E mais, fazendo $a = b = c = 0$, obtemos uma equação ($0 = 0$), que é sati para todos $x$, $y$ e $z$, e portanto não determina um plano; assim, há ao todo sete p passando pela origem no 3-espaço, o que significa que há sete retas no plano pro booliano, exatamente como deve ser.
6. Informação sobre Hamming tirada em grande parte da seção 2 de Thomas M. Thom *From Error-Correcting Codes Through Sphere Packing to Simple Groups*, Washir DC, Mathematical Association of America, 1984.
7. Ibid., p.27.
8. Ibid., p.5-6.
9. Ibid., p.29.

**10.** Todo material sobre Ro provém do *Dictionary of RO*; disponível em: www.sorabji r/ro.

**11.** O material histórico sobre empacotamento de esferas apud George Szpiro, *The I Conjecture*, Nova York, Wiley, 2003.

**12.** Henry Cohn e Abhinav Kumar, "Optimality and uniqueness of the leech lattice a lattices", *Annals of Mathematics*, n.170, 2009, p.1003-50.

**13.** Thompson, From Error-Correcting Codes, p.121.

**14.** Ralph H.F. Denniston, "Some new 5-designs", *Bulletin of the London Mathem Society*, v.8, n.3, 1976, p.263-7.

**15.** Pascal, *Pensées*, n.139.

**16.** Informação sobre o "empreendedor típico" provém do cap.6 do livro de Scott A. S *The Illusions of Entrepreneurship: The Costly Myths That Entrepreneurs, Investors Policy Makers Live By*, New Haven, CT, Yale University Press, 2010.

**14. O triunfo da mediocridade**

**1.** Horace Secrist, *An Introduction to Statistical Methods: A Textbook for Students, A M for Statisticians and Business Executives*, Nova York, MacMillan, 1917.

**2.** Horace Secrits, *The Triumph of Mediocrity in Business*, Chicago, Bureau of Bus Research, Northwestern University, 1933, p.7.

**3.** Robert Riegel, *Annals of the American Academy of Political and Social Science*, v.17( nov 1933, p.179.

**4.** Secrist, *Triumph of Mediocrity in Business*, p.24.

**5.** Ibid., p.25.

**6.** Karl Pearson, *The Life, Letters and Labours of Francis Galton*, Cambridge, GB, Camb University Press, 1930, p.66.

**7.** Francis Galton, *Memories of My Life*, Londres, Methuen, 1908, p.288. Tanto as men de Galton quanto a biografia de Pearson são reproduzidas na totalidade como pa formidável coleção galtoniana; disponível em galton.org.

**8.** Apud Emel Aileen Gökyigit, "The reception of Francis Galton's *Hereditary Ge Journal of the History of Biology*, v.27, n.2, verão 1994.

**9.** De Charles Darwin, "Autobiography", in Francis Darwin (org.), *The Life and Lett Charles Darwin*, Nova York/Londres, Appleton, 1911, p.40.

**10.** Eric Karabell, "Don't fall for another hot April for Ethier", blog de Eric Karabell, Fa Baseball; http://insider.espn.go.com/blog/eric-karabell/post/_/id/275/andre-ethie angeles-dodgers-great-start-perfect-sell-high-candidate-fantasy-baseball; acesso e jan 2014.

11. Dados sobre totais de *home runs* até metade da temporada apud "All-time leaders All-Star Break", CNN Sports Illustrated; disponível em: http://sportsillustrated.cnn baseball/mlb/2001/ allstar/news/2001/07/04/leaders_break_hr.

12. "Review of The Triumph of Mediocrity in Business by Horace Secrist", Journal American Statistical Association, v.28, n.184, dez 1933, p.463-5.

13. Informação biográfica sobre Hotelling apud Walter L. Smith, "Harold Hote 1895-1973", *Annals of Statistics*, v.6, n.6, nov 1978.

14. Meu tratamento da história Secrist/Hotelling deve muito a Stephen M. Stigler, history of statistics in 1933", *Statistical Science*, v.11, n.3, 1996, p.244-52.

15. Walter F.R. Weldon, "Inheritance in animals and plants", *Lectures on the Meth Science*, Oxford, Clarendon Press, 1906. Fiquei sabendo do ensaio de Weldo intermédio de Stephen Stigler.

16. A.J.M. Broadribb e Daphne M. Humphreys, "Diverticular disease: three studies, P Treatment with bran", *British Medical Journal*, v.1, n.6007, fev 1976, p.425-8.

17. Anthony Petrosino, Carolyn Turpin-Petrosino e James O. Finckenauer, "Well-Me Programs Can Have Harmful Effects! Lessons from Experiments of Programs Su Scared Straight", *Crime and Delinquency* 46, n. 3 (2000), p.354-79.

**15. A elipse de Galton**

1. Francis Galton, "Kinship and correlation", *North American Review*, n.150, 1890, p.41

2. Stanley A. Changnon, David Changnon e Thomas R. Karl, "Temporal and s characteristics of snowstorms in the continuous United States", *Journal of Applie teorology and Climatology*, v.45, n.8, 2006, p.1141-55.

3. Informação sobre o mapa de isogônicas de Halley apud Mark Monmonier, *Air App How Meteorologists Learned to Map, Predict, and Dramatize Weather*, Chicago, Univ of Chicago Press, 2000, p.24-5.

4. Dados e imagem, cortesia de Andrew Gelman.

5. Michael Harris, "An automorphic reading of Thomas Pynchon's *Against the Day*", disponível em: www.math.jussieu.fr/~harris/Pynchon.pdf; acesso em 14 jan 201 também Roberto Natalini, "David Foster Wallace and the Mathematics of infini *Companion to David Foster Wallace Studies*, Nova York, Palgrave MacMillan, p.43-58, que interpreta *Infinite Jest* de maneira semelhante, achando que não são a parábolas e hipérboles, mas o *cicloide* — o que se obtém quando se submete parábola à operação matemática da inversão.

6. Francis Galton, *Natural Inheritance*, Nova York, MacMillan, 1889, p.102.

7. Raymond B. Fosdick, "The passing of the Bertillon system of identification", *Jour the American Institute of Criminal Law and Criminology*, v.6, n.3, 1915, p.363-9.

8. Francis Galton, "Co-relation and their measurement, chiefly from anthropometric

correlation", *North American Review*, n.150, 1890, p.419-31. Nas palavras do pr Galton, do artigo de 1890: "Então naturalmente surgiu uma questão quanto aos li de refinamento, até onde o sistema do sr. Bertillon podia ser executado com pro Um *datum* adicional era sem dúvida obtido por meio da medição de cada memb outra dimensão corporal complementar; mas qual era o correspondente aumen acurácia nos meios de identificação? Os tamanhos das várias partes do corpo da m pessoa estão de certa forma relacionados entre si. Uma luva ou um sapato grande s que a pessoa a quem pertença seja um homem grande. Mas o conhecimento de qu homem tem uma luva grande e um sapato grande não nos dá muito mais informa nosso conhecimento se limitar apenas a um dos dois fatos. Seria extremamente inco supor que a acurácia do método antropométrico de identificação aumenta com o nú de medidas da mesma forma que aumentaria com maravilhosa rapidez a segu proporcionada por uma melhor descrição dos cadeados com o número de pavilhõ tamanho dos pavilhões varia de maneira independente um do outro; consequenten o acréscimo de cada novo pavilhão *multiplica* a segurança anterior. Mas o tamanh vários membros e dimensões corporais da mesma pessoa não varia de forma ind dente; assim, o acréscimo de cada nova medida contribui em grau cada vez meno a segurança da identificação."

**9.** Francis Galton, *Memories of My Life*, p.310.

**10.** *Briscoe vs Virginia*, argumentação oral, 11 jan 2010; disponível em: www.oye cases/2000-2009/2009/2009_07_11191; acesso em 14 jan 2014.

**11.** David Brooks, "One nation, slightly divisible", *Atlantic*, dez 2001.

**12.** Andrew E. Gelman et al., "Rich State, poor State, red State, blue State: what's the n with Connecticut?", *Quarterly Journal of Political Science*, v.2, n.4, 2007, p.345-67.

**13.** Ver o livro de Gelman, *Rich State, Poor State, Red State, Blue State*, Princeto Princeton University Press, 2008, p.68-70 para esses dados.

**14.** "NIH stops clinical trial on combination cholesterol treatment", *NIH News*, 26 mai disponível em: www.nih.gov/news/health/may2011/nhlbi-26.htm; acesso em 1 2014.

**15.** "NHLBI stops trial of estrogen plus progestin due to increased breast cancer risk of overall benefit", press release da NIH, 9 jul 2002; disponível em: www.nih.gov/ pr/jul2002/nhlbi-09.htm; acesso em 14 jan 2014.

**16.** Philip M. Sarrel et al., "The mortality toll of estrogen avoidance: an analysis of deaths among hysterectomized women affect 50 to 59 years", *American Journal of Health*, v.103, n.9, 2013, p.1583-8.

**16. O câncer de pulmão leva você a fumar?**

**1.** Material sobre a história inicial da ligação entre fumar e câncer de pulmão apud White, "Research on smoking and lung cancer: a landmark in the history of ch

**2.** Richard Doll e A. Bradford Hill, "Smoking and carcinoma of the lung", *British M* *Journal*, v.2, n.4682, 30 set 1950, p.739-48.

**3.** Fisher escreveu isso em 1958, apud Paul D. Stolley, "When genius errs: R.A. Fishe the lung cancer controversy", *American Journal of Epidemiology*, v.133, n.5, 1991.

**4.** Ver, por exemplo, Dorret I. Boomsma, Judith R. Koopmans, Lorenz J.P. van Door Jacob F. Orlebeke, "Genetic and social influences on starting to smoke: a study of I adolescent twins and their parents", *Addiction*, v.89, n.2, fev 1994, p.219-26.

**5.** Jan P. Vandenbroucke, "Those who were wrong", *American Journal of Epidemi* v.130, n.1, 1989, p.3-5.

**6.** Apud Jon M. Harkness, "The U.S. Public Health Service and smoking in the 1950 tale of two more statements", *Journal of the History of Medicine and Allied Sciences* n.2, abr 2007, p.171-212.

**7.** Idem.

**8.** Jerome Cornfield, "Statistical relationship and proof in Medicine", *American Statist* v.8, n.5, 1954, p.20.

**9.** Para a pandemia de 2009, ver Angus Nicoll e Martin McKee, "Moderate pandemi many dead: learning the right lessons in Europe from the 2009 pandemic", *Eur* *Journal of Public Health*, v.20, n.5, 2010, p.486-8. Notar, porém, que os estudos recentes sugeriram que o número de mortes no mundo todo foi muito mais alto d o originalmente estimado, talvez da ordem de 250 mil.

**10.** Joseph Berkson, "Smoking and lung cancer: some observations on two recent rep *Journal of American Statistical Association*, v.53, n.281, mar 1958, p.28-38.

**11.** Idem. 12. Idem.

**17. Não existe esse negócio de opinião pública**

**1.** "Lowering the deficit and making sacrifices", 24 jan 2011; disponível www.cbsnews.com/htdocs/pdf/poll_deficit_011411.pdf; acesso em 14 jan 2014.

**2.** "Fewer want spending to grow, but most cuts remain unpopular", 10 fev 2011; dispo em: www.people-press.org/files/2011/02/702.pdf.

**3.** Bryan Caplan, "Mises and Bastiat on how democracy goes wrong, Part II", 2003, Li of Economics and Liberty; disponível em: www.econlib.org/library/Columns/y CaplanBastiat.html; acesso em 14 jan 2014.

**4.** Paul Krugman, "Don't cut you, don't cut me", *New York Times*, 11 fev 2011; dispo em: http://krugman.blogs.nytimes.com/2011/02/11/dont-cut-you-dontcut-me.

**5.** "Cutting government spending may be popular but there is little appetite for cu specific government programs", Harris Poll, 16 fev. 2011; disponível www.harrisinteractive.com/NewsRoom/HarrisPolls/ tabid/447/mid/ articleId/693/ctl/ReadCustom%20Default/ Default.aspx; acesso em 14 jan 2014.

**7.** “The AP-GfK Poll, November 2010”, questões HC1 e HC14a; disponível em: h surveys.ap.org./data/GfK/AP-GfK%20Poll%20November%20Topline-nonCC.pdf

**8.** *Annals of the Congress of the United States*, 17 ago 1789, Washington, DC, Ga Seaton, 1834, p.782.

**9.** *Atkins vs. Virginia*, 536 US 304, 2002.

**10.** “Akhil Reed Amar and Vikram David Amar, eighth amendment mathematics (P how the Atkins justices divided when summing”, *Writ*, 28 jun 2002; disponíve writ.news.findlaw.com/amar/20020628.html; acesso em 14 jan 2014.

**11.** Números de execuções apud Death Penalty Information Center; disponíve www.deathpenaltyinfo.org/executions-year; acesso em 14 jan 2014.

**12.** Ver, por exemplo, Atsushi Tero, Ryo Kobayashi e Toshiyuki Nakagaki, “A mathem model for adaptive transport network in path finding by true slime mold”, *Jour Theoretical Biology*, v.244, n.4, 2007, p.553-64.

**13.** Tanya Latty e Madeleine Beekman, “Irrational decision-making in an amo organism: transitivity and context-dependent preferences”, *Proceedings of the Society B: Biological Sciences*, v.278, n.1703, jan 2011, p.307-12.

**14.** Susan C. Edwards e Stephen C. Pratt, “Rationality in collective decision-making b colonies”, *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, v.276, n.1673, p.3655-61.

**15.** Constantine Sedikides, Dan Ariely e Nils Olsen, “Contextual and proce determinants of partner selection: of asymmetric dominance and prominence”, *Cognition*, v.17, n.2, 1999, p.118-39. Mas ver também Shane Frederick, Leonard Ernest Baskin, “The limits of attraction” (documento de trabalho), argumentando evidência para o efeito de dominação assimétrica em seres humanos fora dos cer de laboratório é muito fraca.

**16.** John Stuart Mill, *On Liberty and Other Essays*, Oxford, Oxford University Press, p.310.

**17.** Os totais de votos, aqui, apud “Burlington Vermont IRV mayor election”; disponív http://rangevoting.org/Burlington.html; acesso em 15 jan 2014. Ver também a aval da eleição feita pelo cientista político da Universidade de Vermont Anthony Gierz “Instant Runoff Voting”; disponível em: www.uvm.edu/~vlrs/IRVassessment.pdf; a em 15 jan 2014.

**18.** Ian MacLean e Fiona Hewitt (orgs.), *Condorcet: Foundation of Social Choice and Po Theory*, Cheltenham, GB, Edward Elgar Publishing, 1994, p.7.

**19.** De “Essay on the applications of analysis to the probability of majority decisions”, MacLean e Fiona Hewitt, *Condorcet*, p.38.

**20.** Material sobre Condorcet, Jefferson e Adams, apud MacLean e Hewitt, *Condorcet*,

**21.** O material sobre a relação entre Voltaire e Condorcet nesta seção, em grande parte David Williams, “Signposts to the secular city: the Voltaire-Condorcet relationsh

T.D. Hemming, Edward Freeman e David Meakin (orgs.), *The Secular City: Stud the Enlightenment*, Exeter, GB, University of Exeter Press, 1994, p.120-33.

**22.** Lorraine Daston, *Classical Probability in the Enlightenment*, Princeton, NJ, Prin University Press, 1995, p.99.

**23.** Relatado numa carta de Mme. Suard, 3 jun 1775, apud Williams, "Signposts", p.12

**18. "A partir do nada criei um estranho Universo novo"**

**1.** Esta citação, e grande parte da discussão histórica do trabalho de Bolyai em geom não euclidiana, apud Amir Alexander, *Duel at Dawn: Heroes, Martyrs, and the R Modern Mathematics*, Cambridge, MA, Harvard University Press, 2011, parte IV.

**2.** Steven G. Kranz, *An Episodic History of Mathematics*, Washington, DC, Mathem Association of America, 2010, p.171.

**3.** In *Bush vs. Gore*, 531 U.S. 98, 2000.

**4.** Antonin Scalia, *A Matter of Interpretation: Federal Courts and the Law*, Princeto Princeton University Press, 1997, p.25.

**5.** Citado amplamente, por exemplo, in Paul Dickson, *Baseball's Greatest Quot* (ed.rev.), Glasgow, Collins, 2008, p.298.

**6.** Para ser justo, a pergunta "O que Derek Jeter sabia e quando soube?" nun completamente resolvida. Numa entrevista em 2011 com Carl Ripken Jr., ele recon que os Yankees "se deram bem" no jogo, mas não se dispôs a ir a ponto de dizer q devia ter sido eliminado. Mas devia.

**7.** De Richard A. Posner, "What's the biggest flaw in the opinions this term?", *Slate*, 2 2013.

**8.** Ver, por exemplo, a participação de Scalia in *Green vs Bock Laundry Machine Co* U.S. 504, 1989.

**9.** Da tradução inglesa do discurso de Hilbert feita por Mary Winston Newson, *Bull the American Mathematical Society*, jul 1902, p.437-79.

**10.** Reid, *Hilbert*, Berlim, Springer-Verlag, 1970, p.57.

**11.** Hilbert, "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, n.95, 1926, p.161-90; trad Erna Putnam e Gerald J. Massey, "On the infinite", in Paul Benacerraf e Hilary Pu (orgs.), *Philosophy of Mathematics*, 2ª ed., Cambridge, GB, Cambridge University 1983.

**12.** Se quiser ver como fica quando matemáticos sérios vão tim-tim por tim-tim, assistir à coisa toda se desenrolar em tempo real na seção de comentários do bl matemática *The N-Category Café*, 27 set 2011, "The inconsistency of Arithmetic", d nível em: http://golem.ph.utexas.edu/category/201 the_inconsistency_of_arithmetic.html; acesso em 15 jan 2014.

**13.** Philip J. Davis e Reuben Hersh, *The Mathematical Experience*, Boston, Houghton M

14. O livro de Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity*, Nova York, Scribner, 1! um meticuloso relato popular da vida e da obra de Ramanujan, se você quiser mais.

15. Reid, *Hilbert*, p.7.

16. Ver, por exemplo, o trabalho de Angela Lee Duckworth.

17. De uma carta que Twain escreveu em 17 mar 1903 para a jovem Helen Keller in bulk of all human utterances is plagiarism", letters of note; disponível www.lettersofnote.com/2012/05/bulk-of-all-human-utterances-is.html; acesso e jan 2014.

18. Terry Tao, "Does one have to be a genius to do Maths?"; disponível em: h terrytao.wordpress.com/career-advice/does-one-have-to-be-a-genius-to-do-n acesso em 15 jan 2014.

19. A história e a conversa citada, apud "Kurt Gödel and the Institute", Institute for Adv Study; disponível em: www.ias.edu/people/godel/institute.

20. Reid, *Hilbert*, p.137.

21. Reid, *Hilbert*, p.210.

22. De "An election between three candidates", seção de "Essays on the applicatic analysis", de Condorcet, in MacLean e Hewitt, *Condorcet.*

**Epílogo: Como estar certo**

1. No entanto, Wald cumpriu seu serviço compulsório no Exército romeno, de mod não posso dizer que ele não ergueu.

2. Apud Ashbery, *The Double Dream of Spring*, 1966. Você pode ler o poema or disponível em: www.poetryfoundation.org/poem/177260; acesso em 15 jan 2014.

3. "Sitting on a fence" aparece no álbum de estreia dos Housemartins, *London O Hu*

4. Parte desse material é adaptada de minha resenha sobre o livro de Silver, *The Signa the Noise*, *Boston Globe*, 29 set 2012.

5. Josh Jordan, "Nate Silver's flawed model", *National Review Online*, 22 out 2012; dispo em: www.nationalreview.com/articles/331192/nate-silver-s-flawedmodel-josh-jc acesso em 15 jan 2014.

6. Dylan Byers, "Nate Silver: one-term celebrity?", *Politico*, 29 out 2012.

7. Nate Silver, "October 25: the State of the States", *New York Times*, 26 out 2012.

8. Willard van Orman Quine, *Quiddities: An Intermittently Philosophical Dictic* Cambridge, MA, Harvard University Press, 1987, p.21.

9. Esses não são os números reais de Silver, que não estão arquivados, até onde afirmar; são apenas números inventados para ilustrar os tipos de predição que ele fazendo antes da eleição.

**10.** O debate sobre eleições apertadas é adaptado do meu artigo “To resolve Wisco State Supreme Court election flip a coin”, *Washington Post*, 11 abr 2011.

**11.** De *The Autobiography of Benjamin Franklin*, Nova York, Collier, 1909; disponíve www.gutenberg.org/cache/epub/148/pg148html; acesso em 15 jan 2014.

**12.** Ver, por exemplo, “I, Mudd”, *Star Trek*, no ar em 3 nov 1967.

**13.** F. Scott Fitzgerald, “The crack-up”, *Esquire*, fev 1936.

**14.** Por exemplo, in George G. Szpiro, *Poincaré’s Prize: The Hundred-Year Quest to Solv of Math’s Greatest Puzzles*, Nova York, Dutton, 2007.

**15.** Samuel Beckett, *The Unnameable*, Nova York, Grove Press, 1958.

**16.** Minha menção à linguagem de DFW é tirada de um artigo que publiquei na *Sla* set 2008, “Finite jest: editors and writers remember David Foster Wallace”; dispo em: www.slate.com/articles/arts/culturebox/2008/09/finite_jest_2.html.

**17.** Samuel Beckett, *Murphy*, Londres, Routledge, 1938.

# *Agradecimentos*

Já se vão mais ou menos oito anos desde que tive pela primeira vez a ideia de escreve livro. Ele está agora em suas mãos, e não é só uma ideia, é um testemunho da sábia orien do meu agente Jay Mandel, que com muita paciência me perguntava todo ano se eu e pronto para tentar escrever algo. E que, quando eu finalmente disse "sim", ajudou- refinar o conceito de "Eu quero gritar para as pessoas, detalhadamente, quanto a maten é bacana" para alguma coisa mais parecida com um livro de verdade.

Sou muito afortunado de ter o livro na Penguin Press, que tem uma longa tradiç ajudar professores a falar para um público amplo permitindo-lhes ao mesmo tempo intelectualmente. Tirei grande proveito das percepções de Colin Dickerman, que adc o livro e ajudou no processo até a forma quase terminada, e Scott Moyers, que o assun reta final. Ambos foram muito compreensivos com um autor novato, à medida que o p foi se transformando em algo bem diferente do livro que eu havia originalmente pro Também me beneficiei muito dos conselhos e da assistência de Mally Anderson, Aki Sarah Hutson e Liz Calamari, na Penguin Press, e de Laura Stickney, da Penguin do Unido.

Também devo minha gratidão aos editores da *Slate*, especialmente Josh Levin, Jack S e David Plotz, que decidiram, em 2001, que a revista precisava de uma coluna de matem Eles vêm cuidando do meu material desde então, ajudando-me a aprender como falar matemática de um modo que o não matemático possa entender. Algumas partes deste são adaptadas dos meus artigos na *Slate* e foram beneficiadas com a edição deles também muito grato aos meus editores em outras publicações: o *New York Tin Washington Post*, o *Boston Globe* e o *Wall Street Journal*. (O livro também contém a trechos redirecionados dos meus artigos no *Post* e no *Globe*.) Sou especialmente g Heidi Julavits, na *Believer*, e Nicholas Thompson, na *Wired*, que foram os primeiros encomendar matérias longas e me deram lições críticas sobre como manter uma nar matemática fluente durante milhares de palavras seguidas.

Elise Craig fez um excelente trabalho verificando fatos em algumas partes do livr você achar algum erro, será em outras partes. Greg Villepique copidescou o livro, remov erros atribuíveis ao jargão e factuais. Ele é um inimigo incansável de hifens desnecess

Barry Mazur, meu orientador de doutorado, ensinou-me grande parte do que ago sobre teoria dos números; e mais, ele serve de modelo para as profundas conexões e matemática e outros modos de pensar, expressar e sentir.

Para a citação de Russell que abre o livro, estou em dívida com David Foster Wallac

Muito de *O poder do pensamento matemático* foi escrito enquanto eu estava n sabático de minhas funções na Universidade de Wisconsin-Madison. Agradeço à Wisc Alumni Research Foundation por me possibilitar estender esse período de licença du um ano inteiro com uma Romnes Faculty Fellowship e aos meus colegas em Madiso me apoiarem neste projeto idiossincrático e não exatamente acadêmico.

Quero agradecer também ao Barriques Coffee, na Monroe Street, em Madison, grande parte deste livro foi produzida.

O livro em si beneficiou-se de sugestões de leituras minuciosas de muitos amigos, co e estranhos que responderam ao meu e-mail, incluindo: Laura Balzano, Meredith Brou Tim Carmody, Tim Chow, Jenny Davidson, Jon Eckhardt, Steve Fienberg, Peli Griet Hieratic Conglomerate, Gil Kalai, Emmanuel Kowalski, David Krakauer, Lauren I Tanya Latty, Marc Mangel, Arika Okrent, John Quiggin, Ben Recht, Michel Regenw Ian Roulstone, Nissim Schlam-Salman, Gerald Selbee, Cosma Shalizi, Michelle Shih, Simon, Brad Snyder, Elliott Sober, Miranda Spieler, Jason Steinberg, Hal Stern, Step Tai, Bob Temple, Ravi Vakil, Robert Wardrop, Eric Wepsic, Leland Wilkinson e Janet W Inevitavelmente há outros; peço desculpas a qualquer um que eu tenha esquecido. C escolher diversos leitores que deram um feedback especialmente importante: Tom Sc que leu a coisa toda com olhar aguçado e uma atitude implacável; Andrew Gelman e Ste Stigler, que me mantiveram correto em relação à história da estatística; Stephen Bur me manteve correto em relação à poesia; Henry Cohn, que realizou uma leitura espar mente cuidadosa de boa parte do livro e me deu a citação sobre Winston Churchill e o projetivo; Lynda Barry, que me disse que tudo bem eu mesmo desenhar as figuras; e pais, ambos profissionais de estatística aplicada, que leram tudo e me disseram qua coisa estava ficando abstrata demais.

Agradeço a meu filho e a minha filha por terem sido pacientes ao longo dos muito de trabalho que o livro exigiu, e a meu filho em particular por desenhar uma das fi Acima de tudo, a Tanya Schlam, leitora primeira e final de tudo que vocês viram aq pessoa cujo apoio e amor tornaram possível eu chegar a conceber este projeto. Ela me a a compreender, mais ainda que a matemática, como estar certo.

# *Índice remissivo*

“Brilhante… O talento de Ellenberg para encontrar situações da vida real carregad princípios matemáticos deve causar inveja em qualquer professor da disciplina… Pa prazer intelectual do livro é ver o autor saltar de tema em tema… O efeito final é um in mosaico unificado pela matemática.” *The Washington Post*

“Jordan Ellenberg mostra como a matemática entretém e estimula o raciocínio. Mas tar que o raciocínio matemático pode ser uma caixa de ferramentas para qualquer ser per – qualquer pessoa que queira evitar as falácias e outras formas de erro.” Steven P cientista cognitivo, professor de psicologia em Harvard e autor de *Como a mente func*

“Os matemáticos, de Charles Lutwidge Dodgson a Steven Strogatz, têm celebrado o da matemática na vida e na imaginação. Nesta exploração imensamente agradáv matemática cotidiana… Ellenberg explica os princípios fundamentais com prazer eru seja achando furos nas predições de um ‘apocalipse de obesidade’ nos Estados Unid desconstruindo a tentativa do psicólogo B. F. Skinner de provar estatisticamente que Sh peare era um fracasso em aliteração.” *Nature*

“Fácil de acompanhar, apresentado com humor. O livro irá ajudá-lo a evitar as arma que surgem quando não temos os instrumentos corretos.” Mario Livio, *The Wall Journal*

“Revigorante, lúcido e ao mesmo tempo rigoroso, o livro nos mostra como surgem as matemáticas – e também como podemos começar a pensar matematicamente.” *The York Times*

“Espirituoso, irresistível e simplesmente gostoso de ler, este livro vai ajudar você a ex seus superpoderes matemáticos.” *Scientific American*

“Ellenberg rompe a difundida percepção da matemática como assunto acadêmico, i vante para a vida das pessoas comuns. Os leitores serão surpreendidos pela frequênci que a matemática lança uma luz inesperada sobre a economia, a saúde e a política. Base se em pouquíssimas fórmulas, Ellenberg escreve com verve e humor, demonstrando matemática simplesmente é uma extensão do senso comum. Ele traduz até mesmo o tra de pioneiros teóricos como Cantor e Gödel para uma linguagem de amadores inteliger Um encontro estimulante com a matemática.” *Booklist*

“Um poeta-matemático oferece uma cartilha poderosa e divertida para a era dos gr bancos de dados… Um livro de matemática gratificante para qualquer um.” *Salon*

“Se você vai tirar férias e está procurando um livro informativo e de leitura agra embarque em *O poder do pensamento matemático*, de Jordan Ellenberg.” *Bloomberg V*

“O livro me faz lembrar do grande autor de matemática Martin Gardner: Ellenberg partilha da notável habilidade de Gardner de escrever de forma clara e interessante, duzindo ideias matemáticas complexas sem que o leitor registre qualquer dificuldade.” *Higher Education*

“O autor evita o jargão pesado e se apoia em fatos interessantes do mundo real e em equ e ilustrações básicas para comunicar como até mesmo a matemática simples é uma menta poderosa… Espirituosa e expansiva, a matemática de Ellenberg deixará os le informados, intrigados e munidos de uma profusão de assuntos interessantes para co sas.” *Kirkus Reviews*

Título original:
*How Not to Be Wrong*
(*The Power of Mathematical Thinking*)

Tradução autorizada da primeira edição americana,
publicada em 2014 por Penguin Press,
de Nova York, Estados Unidos


Jorge Zahar Editor Ltda.
rua Marquês de S. Vicente 99 – 1º | 22451-041 Rio de Janeiro, RJ
tel (21) 2529-4750 | fax (21) 2529-4787
editora@zahar.com.br | www.zahar.com.br



Grafia atualizada respeitando o novo
Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Capa: Sérgio Campante
Produção do arquivo ePub: Simplíssimo Livros

Edição digital: abril 2015
ISBN: 978-85-378-1450-5